



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE ÉPREUVE :

294

ESC_MATT

Concepteur Épreuves ESC : ESC SAINT-ETIENNE

OPTION : TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 24 Mai 2005, de 14 h. à 18 h.

N.B.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soient les matrices carrées $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

On note I la matrice unité d'ordre 3.

1. (a) Montrer à l'aide du pivot de Gauss que P est inversible et calculer son inverse.
- (b) Vérifier la relation $P^{-1}AP = D$.
- (c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(d) Vérifier $P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$ et en déduire que pour tout $n \geq 1$, $A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^n \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^n \end{bmatrix}$.

On considère désormais deux urnes :

Une urne bleue contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1.

Une urne rouge contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1.

On appelle "échange" l'action consistant à extraire simultanément un jeton de chaque urne puis à le remettre dans l'autre urne. On effectue des échanges successifs indéfiniment.

Pour tout entier naturel non nul n on désigne par Z_n la variable aléatoire réelle discrète égale à la somme des points marqués sur les jetons de l'urne bleue après le n -ième échange.

On note Z_0 la variable certaine égale à 1, somme initiale des points dans l'urne bleue.

2. Donner l'ensemble des valeurs possibles de Z_1 et déterminer la loi de Z_1 .

3. (a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer les probabilités conditionnelles : $P_{Z_n=0}(Z_{n+1}=0)$, $P_{Z_n=1}(Z_{n+1}=0)$, $P_{Z_n=2}(Z_{n+1}=0)$.

On note dans la suite et pour tout entier naturel n , $p_n = P(Z_n = 0)$, $q_n = P(Z_n = 1)$, $r_n = P(Z_n = 2)$

(Ce qui entraîne $p_0 = 0, q_0 = 1, r_0 = 0$).

- (b) Grâce à la question (a) et à une formule de probabilités totales, exprimer p_{n+1} en fonction de q_n .
- (c) Donner les relations similaires fournissant q_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n et r_{n+1} en fonction de q_n .

4. On note pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{bmatrix}$

- (a) Vérifier que pour tout entier naturel n non nul, $U_{n+1} = AU_n$. Cette relation est-elle valable pour $n = 0$?
- (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $U_n = A^n U_0$.
- (c) En déduire pour $n \geq 1$, p_n, q_n, r_n en fonction de n ainsi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Z_n ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \frac{1}{e^t + 2 + e^{-t}}$.

1. (a) Montrer que f est positive et continue sur \mathbb{R} . Vérifier que f est paire.
- (b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.
- (c) Pour tout réel t , calculer $f'(t)$ et étudier son signe.
En déduire le tableau des variations de f .
- (d) Tracer l'allure de la courbe représentative (C) de f .

2. (a) Vérifier que pour tout réel t , $f(t) = \frac{e^t}{(e^t + 1)^2}$.

(b) On pose pour tous réels a et b tels que $a \leq b$ l'intégrale $J(a, b) = \int_a^b f(t) dt$.

Montrer que $J(a, b) = \frac{1}{1 + e^a} - \frac{1}{1 + e^b}$.

(c) En déduire la nature et la valeur des intégrales impropres suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} f(t) dt, \quad J = \int_{-\infty}^0 f(t) dt, \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt.$$

3. Soit la fonction F définie sur \mathbb{R} par : Pour tout réel x , $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

(a) A l'aide de la question 2. (b), montrer que $F(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

(b) On considère une variable aléatoire à densité X dont la fonction de répartition est F .

Déterminer $P(X \leq \ln 2)$, $P(-\ln 2 < X \leq \ln 2)$.

Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(X > \ln 2)}(X \leq \ln 3)$.

(c) Montrer que pour tout réel x , $F(-x) = 1 - F(x)$.

En déduire l'unique réel positif α tel que $P(-\alpha < X \leq \alpha) = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire réelle discrète dont l'univers image $X(\Omega)$ est inclus dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) \text{ est l'espérance mathématique de } X.$$

L'objectif de cet exercice est de prouver et d'utiliser l'égalité $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$, notée **(R)**.

1. Etude d'un exemple. Soit X qui suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{3}{4}$.

- (a) Calculer $P(X \geq 1) + P(X \geq 2)$.
- (b) Donner la valeur de l'espérance $E(X)$. Vérifier l'égalité **(R)**.

2. On revient au cas général : X est telle que $X(\Omega)$ est inclus dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$.

- (a) Justifier pour $k \in \{1, \dots, n\}$ l'égalité :

$$P(X \geq k) = P(X = k) + P(X = k + 1) + \dots + P(X = n).$$

- (b) En écrivant puis en sommant les égalités précédentes de $k = 1$ à n , en déduire l'égalité **(R)**.

3. Application sur un exemple :

Un jeu vidéo est constitué de n niveaux successifs.

Lorsque le joueur commence un niveau, ce qui suppose qu'il ait réussi tous les niveaux précédents, la probabilité qu'il le réussisse est $\frac{2}{3}$. Le jeu s'arrête dès que le joueur échoue à un niveau.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de niveaux réussis par le joueur.

- (a) Donner $X(\Omega)$.
- (b) On note N_j l'événement " Le joueur a réussi le niveau j ".
Exprimer pour tout entier naturel k de $\{1, \dots, n\}$ l'événement $(X \geq k)$ à l'aide des événements N_1, N_2, \dots, N_k .
En déduire $P(X \geq k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$.
- (c) En utilisant la formule **(R)**, calculer l'espérance $E(X)$.