



## Partie I : Un produit scalaire sur $E$

1. Établir, pour tout  $(\alpha, \beta) \in [0; +\infty[$  :  $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ .

2. En déduire que, pour tout  $(u, v) \in E^2$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2} dx$  converge.

On note  $(. | .)$  l'application de  $E^2$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout  $(u, v) \in E^2$ , associe  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2} dx$ .

On notera la présence du facteur  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ .

3. a. Démontrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

b. Montrer que l'application  $(. | .)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

4. Démontrer :  $F \subset E$ .

On note encore  $(. | .)$  la restriction à  $F$  ou à  $F_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , du produit scalaire  $(. | .)$  sur  $E$ . On admet que cette restriction est encore un produit scalaire sur  $F$  ou sur  $F_n$ .

On note  $\|.\|$  la norme sur  $E$  associée au produit scalaire  $(. | .)$ , définie, pour tout  $u \in E$ , par :

$$\|u\| = \sqrt{(u | u)}.$$

## Partie II : Polynômes d'Hermite

On note  $w$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $w(x) = e^{-x^2}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $H_n$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x), \text{ où } w^{(n)} \text{ désigne la dérivée } n\text{-ième de } w.$$

En particulier :  $H_0(x) = 1$ .

1. Calculer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $H_1(x)$ ,  $H_2(x)$ ,  $H_3(x)$ .

Faire figurer les calculs sur la copie.

2. a. Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x).$$

b. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_n$  est un polynôme de degré  $n$ .

c. Contrôler alors les résultats obtenus en **II.1** et calculer  $H_4$ .

Faire figurer les calculs sur la copie.

3. Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le coefficient du terme de plus haut degré de  $H_n$ .

4. Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ .

Qu'en déduit-on, en terme de parité, pour l'application  $H_n$  ?

### Partie III : Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

1. a. Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $P \in F$  :

$$(P' | H_{n-1}) = (P | H_n),$$

où  $(. | .)$  est le produit scalaire sur  $F$  défini en I.4.

À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

- b. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $P \in F_{n-1}$  :  $(P | H_n) = 0$ .
- c. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(H_0, \dots, H_n)$  est orthogonale dans  $F$ .
2. Établir que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(H_0, \dots, H_n)$  est une base de  $F_n$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .
- a. Montrer :  $\|H_n\|^2 = (H_n^{(n)} | H_0)$ , où  $\|\cdot\|$  est définie en I.4.
- b. En déduire la valeur de  $\|H_n\|$ .

### Partie IV : Un endomorphisme symétrique

On note  $f, g, h$  les applications définies de  $F$  dans  $F$ , pour tout  $P \in F$ , par :

$$f(P) = -P'' + 2XP' + P, \quad g(P) = 2XP - P', \quad h(P) = P'.$$

Ainsi, par exemple, pour tout  $P \in F$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $(g(P))(x) = 2xP(x) - P'(x)$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $F$ .

On admet que  $g$  et  $h$  sont aussi des endomorphismes de  $F$ , et on note  $\text{Id}_F$  l'application identique de  $F$ .

2. a. Établir :  $g \circ h = f - \text{Id}_F$  et  $h \circ g = f + \text{Id}_F$ .
- b. En déduire :  $f \circ g - g \circ f = 2g$ .
3. Montrer que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $P \in F$ , si  $f(P) = \lambda P$ , alors  $f(g(P)) = (\lambda + 2)g(P)$ .
4. a. Calculer  $f(H_0)$ .
- b. Calculer, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $g(H_k)$ , et en déduire, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :  $f(H_k) = (2k + 1)H_k$ .

5. Établir, pour tout  $(P, Q) \in F^2$  :

$$(P' | Q') = (f(P) | Q) - (P | Q).$$

À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

6. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .
- a. Montrer :  $\forall P \in F_n, f(P) \in F_n$ .

On note  $f_n$  l'endomorphisme de  $F_n$  défini par :

$$\forall P \in F_n, f_n(P) = f(P).$$

- b. Montrer que  $f_n$  est un endomorphisme symétrique de  $F_n$ .
- c. Donner une base orthonormale de  $F_n$  constituée de vecteurs propres de  $f_n$ .

## Partie V : Intervention d'exponentielles

On note, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_a$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par :  $\varphi_a(x) = e^{ax}$ .

1. Vérifier, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :  $\varphi_a \in E$ .
2. Montrer, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :  $(\varphi_a | \varphi_b) = e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$ .
3. Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2}$ .
4. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2}$  converge et calculer sa somme.

## Partie VI : Une limite de probabilité conditionnelle

Soit la fonction  $\Phi$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad \Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer que  $\Phi$  est de classe  $C^1$  sur  $]0; +\infty[$  et déterminer sa dérivée  $\Phi'$ .
2. Soient  $G$  et  $K$  les fonctions définies sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad G(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}\right) \frac{e^{-x^2}}{2} \quad \text{et} \quad K(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

- a. Déterminer les limites des fonctions  $\Phi$ ,  $G$  et  $K$  en  $+\infty$ .
  - b. Déterminer les sens de variation des fonctions  $G - \Phi$  et  $\Phi - K$ .
  - c. En déduire :  $\forall x \in ]0; +\infty[, \quad G(x) \leq \Phi(x) \leq K(x)$ .
  - d. Montrer :  $\Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$ .
3. Soit  $X$  une variable aléatoire normale d'espérance égale à 0 et d'écart-type égal à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .
    - a. Pour tout réel  $x$  strictement positif, exprimer la probabilité  $P(X \leq x)$  à l'aide de la fonction  $\Phi$ .
    - b. Soit  $c$  un réel strictement positif.  
Pour tout réel  $x$ , on considère la probabilité conditionnelle  $P_{(X > x)}(X \leq x + c)$ .  
Montrer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{(X > x)}(X \leq x + c) = 1$ .