

EXERCICE 1

On considère les trois matrices de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.a. Quelles sont les valeurs propres de A ?

b. Déterminer une matrice inversible P telle que : $A = PDP^{-1}$.

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre deux telles que : $AM = MD$.

2.a. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que M appartient à E si et seulement si : $z = 0$ et $y = t$.

c. Établir que (U, A) est une base de E .

d. Calculer le produit UA . Est-ce que UA est élément de E ?

3. On note $f : \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie, pour toute $M \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, par :

$$f(M) = AM - MD.$$

a. Vérifier que f est linéaire.

b. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.

c. Quelle est la dimension de l'image de f ?

d. Déterminer les matrices M de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = M$.

En déduire que 1 est valeur propre de f .

Montrer que -1 est aussi valeur propre de f .

e. Est-ce que f est diagonalisable ?

f. Montrer : $f \circ f \circ f = f$.

EXERCICE 2

On note $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = (x - 1)(y - 2)(x + y - 6).$$

1.a. Montrer que $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont des points critiques de F .

b. Est-ce que F présente un extrémum local au point $(4, 2)$?
Est-ce que F présente un extrémum local au point $(2, 3)$?

2. On note $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = x(x - 2)(2x - 5).$$

a. Montrer : $\forall x \in [4; +\infty[$, $(x - 2)(2x - 5) \geq 4$.

b. En déduire : $\forall x \in [4; +\infty[$, $\varphi(x) \geq 4x$ et $\varphi(x) \in [4; +\infty[$.

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = F(1 + u_n, u_n).$$

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n à l'aide de la fonction φ .

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4^{n+1}$.

Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$?

c. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{10}$.

4. On note $g : [4; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in [4; +\infty[$, par :

$$g(x) = \frac{10}{\varphi(x)}.$$

a. Montrer que l'intégrale $\int_4^{+\infty} g(x) dx$ converge.

b. Trouver trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in [4; +\infty[, g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2x-5}.$$

c. Calculer $\int_4^{+\infty} g(x) dx$.

EXERCICE 3

PARTIE A

1. Soit U une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.
 - a. Rappeler l'expression d'une densité de U .
 - b. En utilisant la définition de la variance de U , montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ est convergente et que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par $\begin{cases} \forall x \leq 0, & F(x) = 0 \\ \forall x > 0, & F(x) = 1 - e^{-x^2}. \end{cases}$

2. Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition d'une variable aléatoire dont on déterminera une densité f .
3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.
 - a. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
 - b. Déterminer, pour tout réel y , la probabilité $P(X^2 \leq y)$. On distinguera les cas $y \leq 0$ et $y > 0$.
 - c. Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. En déduire que X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$.

PARTIE B

1. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p . Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$. Rappeler la valeur de l'espérance $E(Z)$ et celle de la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z .
2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2 et n variables aléatoires indépendantes Z_1, Z_2, \dots, Z_n suivant toutes la loi géométrique de paramètre p . On considère la variable aléatoire $M_n = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n)$.
 - a. Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n .
 - b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(0 \leq M_n - m \leq \sigma_n)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.