

EXERCICE 1

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < e < 2,8$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in]0; +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ln t - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0; +\infty[$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Dresser le tableau des variations de f .
5. Montrer que f est convexe sur $]0; +\infty[$.
6. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - a. Montrer que Γ admet une demi-tangente en O .
 - b. Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.
 - c. Préciser la nature de la branche infinie de Γ .
 - d. Tracer Γ .

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1; +\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt.$$

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]1; +\infty[$ et que, pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$G'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))$$

$$\text{et } G''(x) = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1)).$$

À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F .

2.
 - a. Montrer que G' est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.
 - b. Vérifier : $G'(2) > 0$.
 - c. Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et que $\alpha < 2$.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $\Phi :]1; +\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y) \in]1; +\infty[^2$, par :

$$\Phi(x, y) = (y - f(x+1))^2 + (y - f(x-1))^2, \text{ où l'application } f \text{ est définie dans la partie I.}$$

1. Justifier que Φ est de classe C^2 sur $]1; +\infty[^2$ et calculer les dérivées partielles premières de Φ en tout (x, y) de $]1; +\infty[^2$.
 2. Vérifier que $(\alpha, f(\alpha+1))$ est un point critique de Φ , où α est défini en **II 2.c**.
 3. Est-ce que Φ admet un extrémum local en $(\alpha, f(\alpha+1))$?
-

EXERCICE 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
2. En déduire une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne $(-1 \ 1 \ 1)$, telle que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1} .
3. Calculer la matrice $C = P^{-1}BP$ et vérifier que C est diagonale.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f : E \longrightarrow E$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$.

1. Donner la dimension de E .
2. Vérifier que f est un endomorphisme de E .
3. Soit $M \in E$. On note $N = P^{-1}MP$, où P est définie en **I.2**.
 - a. Montrer : $M \in \text{Ker}(f) \iff DN = NC$.
 - b. Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $DN = NC$.
 - c. Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.
4.
 - a. En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$, puis la dimension de $\text{Im}(f)$.
 - b. Donner au moins un élément non nul de $\text{Ker}(f)$ et donner au moins un élément non nul de $\text{Im}(f)$.

EXERCICE 3

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad h(x) = \frac{x}{2-x}.$$

a. Montrer que h est une bijection de $[0; 1]$ sur $[0; 1]$ et, pour tout $y \in [0; 1]$, exprimer $h^{-1}(y)$.

b. Déterminer deux réels α et β vérifiant : $\forall x \in [0; 1], \quad h(x) = \alpha + \frac{\beta}{2-x}$.

c. Calculer $\int_0^1 h(x) dx$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

a. Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .

b. Pour tout réel y de $[0; 1]$, déterminer la probabilité de l'événement $\left(\frac{X}{2-X} \leq y\right)$.

c. Montrer que la variable aléatoire $Y = \frac{X}{2-X}$ admet une densité et déterminer une densité g de Y .

d. Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ et déterminer $E(Y)$.

Partie II : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note I_1, I_2, \dots, I_n . Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$. On suppose de plus que, pour tout réel t , les n événements $(T_1 \leq t), (T_2 \leq t), \dots, (T_n \leq t)$ sont indépendants.

1. Soit un réel t appartenant à $[0; 1]$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

On note $S_t = B_1 + B_2 + \dots + B_n$.

a. Que modélise la variable aléatoire S_t ?

b. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_t .

2. Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.

a. Soit un réel t appartenant à $[0; 1]$. Comparer l'événement $(R_1 > t)$ et l'événement $(S_t = 0)$.

b. Montrer que la variable aléatoire R_1 admet une densité et en déterminer une.

3. Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la deuxième arrivée.

Montrer que la variable aléatoire R_2 admet une densité et en déterminer une.

