Exercice 2

On admet que, si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :
$\text{cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1) E(Z_2)$.
On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.
On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ P(Y \leq x) = P([U=1] \cap [X \leq x]) + P([U=-1] \cap [X \geq -x])$.
   b) En déduire que Y suit la même loi que X.

2) a) Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$.
   b) En déduire que $\text{cov}(X, Y) = 0$.

3) a) Rappeler la valeur de $E(X^2)$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$.
   b) Montrer, grâce à une intégration par parties, que :
$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \displaystyle\int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.
   c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ converge et vaut $\dfrac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.
   d) Établir finalement que X a un moment d'ordre 4 et que $E(X^4) = 3$.

4) a) Vérifier que $E(X^2 Y^2) = 3$.
   b) Déterminer $\text{cov}(X^2, Y^2)$.
   c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.
   d) Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables discrètes est encore valable pour les variables à densité. Lequel ?

Exercice 3

1) a) Montrer que : $\forall x > 0,\ x - \ln x > 0$.
   b) On pose alors : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$.
Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.

2) a) Montrer que f est continue sur D.
   b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

3) a) Justifier que f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $D \setminus \{0\}$.
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Étudier le signe de $f(x)$.

5) Pour tout réel x élément de D, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est de classe C^1 sur D puis étudier ses variations.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,dt$.

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t - \ln t}\,dt$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Problème

Partie 1

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

1) a) Déterminer les valeurs propres de M, que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

b) En déduire que M est diagonalisable.

2) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit MP.

Que peut-on en déduire en ce qui concerne les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$?

b) Justifier que la matrice P est inversible.

Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = P D^n P^{-1}$, où D est la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer P^{-1} et en déduire explicitement M^n pour tout n *de* $\mathbb{N}$.

Partie 2

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On y effectue au hasard des tirages d'une boule selon la procédure suivante :

• si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.

• si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note B_i (respectivement R_i) l'événement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches qui restent dans l'urne après le $n^{\text{ème}}$ tirage et l'on pose $X_0 = 2$.

On pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ et on a donc $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer, grâce à la formule des probabilités totales, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = M U_n$.

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n U_0$, puis déterminer la loi de X_n.

3) On note T_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage où l'on extrait la première boule blanche et T_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage où l'on extrait la deuxième boule blanche. On admet que T_1 et T_2 sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que les variables aléatoires X_n $(n \in \mathbb{N})$

a) Reconnaître la loi de T_1.

b) Écrire les événements $(T_2 = 2)$ et $(T_2 = 3)$ à l'aide de certains des événements B_i puis calculer les probabilités $P(T_2 = 2)$ et $P(T_2 = 3)$.

c) Déterminer la loi du couple (T_1, T_2) et en déduire que la loi de T_2 est donnée par :

$$\forall j \geq 2,\ P(T_2 = j) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}.$$

d) Montrer que T_2 possède une espérance et calculer cette dernière.

4) a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $(T_2 = n)$ en fonction des événements $(X_{n-1} = 1)$ et $(X_n = 0)$.

b) Retrouver ainsi la loi de T_2.

5) a) On rappelle que la fonction *random*(n) renvoie aléatoirement un nombre entier élément de $\{0, 1, ..., n-1\}$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche le plus petit entier naturel n pour lequel $X_n = 0$.

```
Program edhec2007 ;
Var  X, n, hasard : integer ;
Begin
   Randomize ;
   X : = 2 ; n : = 0 ;
      Repeat
      n : = n+1 ;
      hasard : = random(3) ;
      if  (--------) then  X : = -------- ;
      until (X = 1) ;
      Repeat
      n : = n+1 ;
      hasard : = -------- ;
      if  (--------) then  X : = -------- ;
      until (X = 0) ;
   Writeln (n) ;
End.
```

b) Comment modifier ce programme pour qu'il calcule et affiche les valeurs prises par T_1 et T_2 lors de l'expérience aléatoire étudiée ?