Exercice 2

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$.

1) a) Déterminer la matrice $A(A-2I)^2$ et en déduire les seules valeurs propres possibles de f.

b) On considère les vecteurs $u = (2,1,-2)$ et $v = (3,1,-2)$.

Déterminer $f(u)$ et $f(v)$ puis en déduire les valeurs propres de f.

c) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

2) On considère le vecteur $w = (-2,0,1)$.

a) Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Exprimer $f(w)$ comme combinaison linéaire de v et w puis vérifier que la matrice de f dans la base (u,v,w) est $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

3) a) On pose $T = D + N$, où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer N^2 puis utiliser la formule du binôme pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $T^n = D^n + nD^{n-1}N$.

b) Donner explicitement, pour tout entier naturel n non nul, la matrice T^n en fonction de n.

c) Proposer une matrice P telle que $A = PTP^{-1}$ puis déterminer P^{-1}.

d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $A^n = PT^nP^{-1}$

e) Déterminer explicitement A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 3

1) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$ est convergente et donner sa valeur.

2) On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$.

a) Montrer que f est paire.

b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.

3) On pose $Y = \ln(1 + |X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.

c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Problème

Partie 1 : préliminaires

1) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.

a) Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que, pour tout couple (x, y) d'éléments de $[0,1]$, on a : $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$.

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall k\in[\![0, n-1]\!], \forall t\in[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}], |f(t)-f(\frac{k}{n})| \leq M(t-\frac{k}{n})$.

c) Montrer alors que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall k\in[\![0, n-1]\!], \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) \right| \leq \frac{M}{2n^2}$.

d) En sommant la relation précédente, établir que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \left| \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \right| \leq \frac{M}{2n}$.

e) Conclure finalement que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

2) Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$.

a) Montrer que : $\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, I(p,q) = \frac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$.

b) En déduire que : $\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0)$.

c) Déterminer $I(p+q,0)$ et montrer finalement que : $\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3) Informatique.

Compléter la déclaration récursive suivante afin qu'elle permette le calcul de $I(p,q)$:

```
Function i(p, q : integer) : real ;
Begin
If q = 0 then i : = ------ else ------ ;
End ;
```

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.

On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit la loi uniforme sur $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\}$.

On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq1}$, définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $(U_n = \frac{k}{n})$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(m, \frac{k}{n})$.

1) On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$. Rappeler la valeur de l'espérance de Y puis montrer que $E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2$.

2) Donner la loi de X_1.

Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3) a) Déterminer $X_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout i de $X_n(\Omega)$, on a :

$$P(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

b) Utiliser la première question de cette partie pour donner sans calcul la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$. Montrer alors que l'espérance de X_n est égale à $\frac{m(n-1)}{2n}$.

c) En utilisant toujours la première question de cette partie, donner sans calcul la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$.

Montrer alors que l'espérance de $X_n(X_n-1)$ est égale à $\frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

d) En déduire finalement que la variance de X_n est égale à $\frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}$.

4) a) En utilisant les résultats obtenus aux deux premières questions de la première partie, calculer, pour tout i de $X_n(\Omega)$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = i)$.

b) En déduire que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

c) Vérifier que $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$ et $\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = V(X)$.