MATHÉMATIQUES 2S
(ÉPREUVE N° 283)
ANNÉE 2018
ÉPREUVE CONÇUE PAR HEC PARIS ET ESCP EUROPE
VOIE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

1 – Le sujet

Les trois parties du problème avaient pour objet l'étude de la convergence de séries dont les termes sont des variables aléatoires.

La convergence de telles séries, en loi ou en probabilité, est celle de la suite des sommes partielles associées.

Dans une partie I, on étudiait un cas particulier de série aléatoire, dite série télescopique.
Cette partie faisait appel à des connaissances précises sur des notions fondamentales telles que densité de probabilité, fonction de répartition, convergence en loi, produit de convolution et loi normale centrée réduite.

La partie II était consacrée à l'étude de séries numériques « lacunaires » obtenues à partir de la série harmonique (divergente) par effacement de certains de ses termes.
Deux exemples de séries convergentes et un exemple de série divergente étaient proposés, cette partie s'achevant sur la complétude d'un script *Scilab*.

Enfin, la partie III, la plus longue, proposait une étude complète des séries aléatoires de Riemann alternées.

Cette partie mobilisait des connaissances sur la convergence de séries numériques, l'inégalité de Markov, le théorème de la limite monotone pour des événements aléatoires et sur les convergences en loi et en probabilité.

Une question de *Scilab* se présentait sous forme graphique et permettait de conjecturer une certaine convergence en loi, convergence que l'on demandait de démontrer dans l'ultime question du problème.

2 – Barème

Les trois parties du problème comptaient respectivement pour 31%, 25% et 44% des points de barème.

Le poids des questions de *Scilab* était assez élevé puisqu'il représentait 14% des points de barème. Les questions les plus cotées étaient : 2.a), 2.b), 2.c), 8.d) et 10.a).

3 – Remarques de correction

D'une façon générale, la connaissance du cours est insuffisante : un petit nombre de questions sont traitées « mécaniquement », sans avoir à réfléchir, tandis que nombre de questions aussi simples et classiques sont laissées de côté.

Les opérations élémentaires et les notions de base sont de plus en plus mal maîtrisées : addition et multiplication sont régulièrement confondues (on passe de $2x = y$ à $x = y-2$; on confond diviser par $2n$ et diviser par n^2, etc .), propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, utilisation de l'indépendance (invoquée pour l'espérance d'une somme ou pour le théorème de Slutsky mais pas pour la convolution ou la somme de lois normales !!).

1.a) Confusion entre somme et somme partielle. Des conclusions aberrantes : « la somme est nulle », « le terme général tend vers 1, donc la série converge », etc.
2.a) Le calcul de c_n demandait de bien s'organiser. La plupart des fautes de calcul provenaient d'une erreur de signe dans la première intégrale. La manipulation des fractions a été un obstacle insurmontable dans beaucoup de copies. Le graphe de f_3 s'est révélé très discriminant : densités négatives, fonctions non affines, asymptotes verticales, etc.
3.a) Dans une majorité de copies, la variable aléatoire X est bornée puisqu'elle admet une densité bornée, ce qui permet d'appliquer l'inégalité de Markov !!
3.b) Le théorème de Slutsky est très souvent invoqué. La convergence en probabilité vers une variable aléatoire certaine est rarement invoquée. En revanche, l'indépendance de X_1 et X_{n+1} est présentée comme une condition nécessaire...
3.c) Cette fois, dans l'application de la convolution, l'indépendance est oubliée !!
4.a) On identifie la loi d'une combinaison linéaire de variables aléatoires normales indépendantes en calculant un produit de convolution (alors que c'est du cours!!).
Cette question s'est révélée d'autant plus sélective qu'il n'est pas rare de trouver dans les copies que « la variance d'une différence est égale à la différence des variances » !!
5.c) Cette question n'a été traitée que par environ 5% des candidats.
Beaucoup de candidats utilisent la formule (fausse) : $m^{1/2}\, m^{1/3} = m^{1/6}$.
6.a) C'est la question qui est souvent traitée correctement.
6.b) De rarissimes candidats prennent soin d'expliquer l'apparition des parties entières dans les bornes.

6.c) La concavité du logarithme est assez bien connue. La manipulation des parties entières est parfois frauduleuse.
8.b) Le développement en série entière de la fonction *exp* commence souvent à 1.
8.c) Une part non négligeable de candidats appliquent l'inégalité de Markov à la variable aléatoire S_n qui est centrée et ils en déduisent que $P(S_n > s) \leq 0$...
9.a) Le fait qu'une tribu soit stable par union *dénombrable* et intersection *dénombrable* est absent de la plupart des copies.

Questions de Scilab 6.g) et 11.c)
Ces questions donnent très rarement lieu à des explications précises.
Ainsi, dans la question 6.g), très peu de candidats comprennent que l'entier n augmente de 2 en 2 dans la boucle *while*. En particulier, la question demandant de compléter la ligne (6) fut très révélatrice.
Dans la question 11.c), on observe que la notion de convergence en loi ne signifie pas grand-chose pour la plupart des candidats. Ainsi, certains ont « vu » que les valeurs de H_n - $h_n(1)$ convergeaient vers 0 ; d'autres ont affirmé que la loi limite était la loi normale centrée réduite !!

4 – Conseils aux futurs candidats

Pour ce qui concerne la forme, le jury conseille aux futurs candidats de lire attentivement le texte préliminaire qui précède toute épreuve écrite de mathématiques, dans lequel il est précisé notamment, que la lisibilité et la qualité de la rédaction entrent pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies : un correcteur ne s'attarde pas à essayer de « décrypter » une copie illisible. Par contre, une copie propre et claire ne peut qu'avantager son auteur. Le jury rappelle également que les abréviations dans les copies doivent être proscrites et il conseille de bien numéroter les questions et d'encadrer les résultats.

De plus, les raisonnements doivent être clairs et précis, les affirmations étant étayées par une argumentation solide. Par exemple, le recours trop fréquent à des phrases du type « il est clair que… » doit être évité au profit d'une justification correcte fondée sur un apprentissage rigoureux et une très bonne maîtrise du cours.

Le jury recommande aux futurs candidats de prendre le temps de lire l'ensemble du sujet, non seulement pour s'en imprégner, mais aussi pour pointer les questions qui paraissent faciles à résoudre, lesquelles ne se situent pas nécessairement dans la première partie du sujet.

La recherche d'une solution à une question ne doit pas dépasser quatre à cinq minutes. Au-delà de ce délai, en cas d'échec, le candidat doit admettre le résultat de cette question (si la réponse figure dans l'énoncé), passer à la question suivante sans éprouver un sentiment de déstabilisation ou de découragement. Autrement dit, le jury recommande aux futurs candidats de faire preuve d'une grande ténacité.

5 – Statistiques

Sur les 3238 candidats ayant composé dans cette épreuve, la note moyenne est de 10,28 avec un écart-type de 5,75 suffisamment élevé pour classer les candidats de manière satisfaisante.

Le nombre de candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à 16 est de 535, soit 16,5% des candidats présents.

On compte 48 candidats qui se voient attribuer la note maximale de 20 en légère progression par rapport au concours 2017.

La note médiane est de 12,4 et les premier et troisième quartiles sont égaux à 4,6 et 14,9 respectivement.

La note maximale de 20 était attribuée aux candidats ayant obtenu au moins 60% des points du barème.

HEC 2018 Mathématiques 2
Éléments de corrigé

Partie I : séries télescopiques

Dans cette partie, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de variables aléatoires indépendantes, de même loi qu'une variable aléatoire de référence* X*, et on étudie la convergence de la série aléatoire*

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{X_n}{n}-\frac{X_{n+1}}{n+1}\right) \qquad (1)$$

1. a) Comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{N+1}$ tend vers 1 quand N tend vers l'infini, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1}\,.$$

b) L'exemple proposé correspond au cas où la variable de référence X est (presque certainement) égale à 1 :

$$\boxed{P([X=1])=1}\,.$$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire Y_n admettant pour densité la fonction f_n définie par

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-\dfrac{1}{n+1}\\ 1+(n+1)x & \text{si } -\dfrac{1}{n+1}\leq x\leq 0\\ c_n & \text{si } 0<x<\dfrac{n}{n+1}\\ (n+1)(1-x) & \text{si } \dfrac{n}{n+1}\leq x\leq 1\\ 0 & \text{si } x>1\end{cases} \qquad (2)$$

où c_n est une constante strictement positive.

a) On trouve $\boxed{c_n = 1}$ (condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de f_n de $-\infty$ à $+\infty$ soit égale à 1) et un graphe trapézoïdal (voir FIGURE 1).

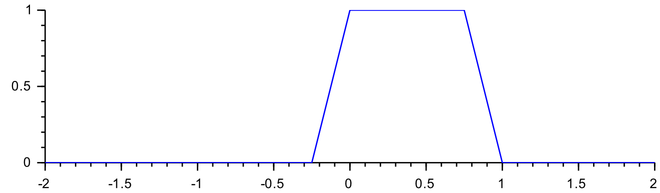

FIGURE 1 – *Représentation graphique de f_3*

b) Après calculs, on trouve :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\dfrac{1}{n+1} \\ \dfrac{n+1}{2}\left(x + \dfrac{1}{n+1}\right)^2 & \text{si } -\dfrac{1}{n+1} \leq x \leq 0 \\ x + \dfrac{1}{2(n+1)} & \text{si } 0 < x < \dfrac{n}{n+1} \\ 1 - \dfrac{n+1}{2}(x-1)^2 & \text{si } \dfrac{n}{n+1} \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \tag{3}$$

La fonction F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque f_n est continue en tout point.

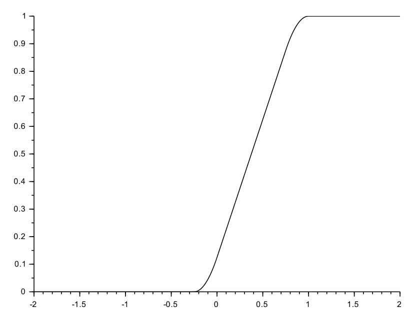

FIGURE 2 – *Représentation graphique de F_3*

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc en loi vers une variable aléatoire Y qui suit la loi uniforme $\mathcal{U}[0,1]$.

3. $D_n = X_1 - \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

a) Soit $\varepsilon > 0$.

$$P([|\frac{X_{n+1}}{n+1}| \geq \varepsilon]] = P([|X| \geq (n+1)\varepsilon]) = P([X \leq -(n+1)\varepsilon]) + 1 - P([X \leq (n+1)\varepsilon])$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini (parce que la fonction de répartition de X tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$, ou par application directe du théorème de limite monotone).

Remarque
Le théorème de Slutsky fournit directement la convergence en loi vers 0, mais le fait que, lorsque la limite est presque certaine, les deux notions de convergence coïncident n'est pas un théorème du programme.

b) La suite constante $(X_1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X et la suite $\big(-\dfrac{X_{n+1}}{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en probabilité vers 0.
Le théorème de Slutsky permet dès lors d'affirmer que D_n converge en loi vers X.

c) La variable aléatoire $-\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ admet pour densité la fonction

$$g_n : t \longmapsto (n+1)\, f\big(-(n+1)t\big) \ .$$

Par application de la formule de convolution, la variable aléatoire D_n admet pour densité la fonction

$$f_{D_n} : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g_n(x-t)\,\mathrm{d}t = (n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, f\big((n+1)(t-x)\big)\,\mathrm{d}t \ .$$

Le fait que la densité f est bornée permet d'affirmer que la formule de convolution est applicable pour définir une densité de la somme des deux variables aléatoires indépendantes X_n et $-\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

d) Lorsque la variable de référence X suit la loi uniforme $\mathcal{U}[0,1]$, la densité de D_n est la densité f_n de la question 2 et la convergence en loi de D_n vers X n'est autre que le résultat prouvé en 2c.

4. a) En tant que combinaison linéaire de deux variables aléatoires normales centrées <u>indépendantes</u>, la variable aléatoire U_n suit une loi normale centrée, dont la variance est :

$$V(U_n) = \frac{1}{n^2}\, V(X_n) + \frac{1}{(n+1)^2}\, V(X_{n+1}) \ .$$

La variable aléatoire U_n suit donc la loi normale centrée $\boxed{\mathcal{N}\big(0, \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}\big)}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} \big(\frac{X_k}{k} - \frac{X_{k+1}}{k+1}\big) = X_1 - \frac{X_{n+1}}{n+1}$ converge en loi vers X, d'après 3.b.

Il en résulte, par la définition donnée en introduction, que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} U_n$ converge en loi et que la loi de la limite de ses sommes partielles est la loi normale centrée réduite.

c) i) La variable aléatoire T'_n suit la loi normale centrée de variance $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\big)$, dont on peut exprimer la fonction de répartition à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P([T'_n\leq x])=\Phi\big(\frac{x}{\sqrt{V(T'_n)}}\big)\ .$$

Lorsque n tend vers l'infini, la variance de T'_n tend vers

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\big)=2\,\big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\big)-1=2\,\zeta(2)-1=\frac{\pi^2}{3}-1$$

et par conséquent, grâce à la continuité de la fonction Φ :

$$\lim_{n\to+\infty}P([T'_n\leq x])=\Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{3}-1}}\Big)$$

qui est la valeur en x de la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée de variance $\dfrac{\pi^2}{3}-1$.

La suite $(T'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}\big(0,\dfrac{\pi^2}{3}-1\big)$.

ii) Les sommes partielles des deux séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1}U_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}U'_n$ n'admettent pas la même limite en loi, alors que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, U_n et U'_n suivent la même loi.
Cela ne révèle aucune contradiction, parce que les variables aléatoires U'_n sont indépendantes alors que les variables aléatoires U_n ne le sont pas.

Partie II : séries harmoniques lacunaires

5. a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour que le carré k^2 d'un entier $k\in\mathbb{N}^*$ soit inférieur ou égal à n, il faut et il suffit que k soit inférieur ou égal à $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. On a donc :

$$h_n(\mathcal{D})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1_{\mathcal{D}}(i)}{i}=\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{k^2}\ .$$

b) Par passage à la limite dans la formule précédente, on justifie la convergence de la suite $\big(h_n(\mathcal{D})\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et obtient :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1_{\mathcal{D}}(n)}{n}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}}\ .$$

c) Soit $S=\{m\in\mathbb{N}\,;\,m^{1/6}\in\mathbb{N}^*\}$.
On procède par double inclusion :

- $S\subset\mathcal{D}\cap\mathcal{T}$ parce que, si $n=m^{1/6}\in\mathbb{N}^*$, alors

$$m=(n^3)^2=(n^2)^3\in\mathcal{D}\cap\mathcal{T}\,.$$

- $\mathcal{D}\cap\mathcal{T}\subset S$ parce que, si m appartient à $\mathcal{D}\cap\mathcal{T}$, alors il existe deux entiers strictement positifs k et ℓ tels que

$$m=k^2=\ell^3\,.$$

Dès lors :

$$m^{1/6} = m^{1/2}m^{-1/3} = \frac{k}{\ell}$$

ce qui entraîne que $m^{1/6}$ est un nombre entier puisqu'il est aussi égal à $\sqrt{\ell}$, qui serait irrationnel si cette racine carrée n'était pas un élément de N^* (d'après la propriété admise).

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1_{\mathcal{D}\cup\mathcal{T}}(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1_{\mathcal{D}}(n)}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1_{\mathcal{T}}(n)}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1_{\mathcal{D}\cap\mathcal{T}}(n)}{n} = \boxed{\zeta(2) + \zeta(3) - \zeta(6)}$.

6.

$$\mathcal{I} = \{2n-1\,;\, n \in \mathbb{N}^*\} \tag{4}$$

a) Pour tout $t \in [n, n+1]$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1} = \frac{2(t-n)}{(2n-1)(2t-1)} \leq \frac{2}{(2n-1)^2}$$

d'où les inégalités demandées par croissance de l'intégrale.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour qu'un entier impair $2k-1$ soit inférieur ou égal à n, il faut et il suffit que k soit inférieur ou égal à $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$. On a donc :

$$h_n(\mathcal{I}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1_{\mathcal{I}}(i)}{i} = \sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \frac{1}{2k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \Big(u_k + \int_k^{k+1} \frac{1}{2t-1}\,\mathrm{d}t\Big) = \sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor + 1} \frac{1}{2t-1}\,\mathrm{d}t$$

d'où :

$$\boxed{h_n(\mathcal{I}) = \sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor (n+3)/2 \rfloor} \frac{1}{2t-1}\,\mathrm{d}t} \,.$$

c) Comme $\dfrac{n+3}{2} - 1 < \lfloor \dfrac{n+3}{2} \rfloor \leq \dfrac{n+3}{2}$, on a

$$n < 2\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor - 1 \leq n+2 \,.$$

Par conséquent

$$1 < \frac{2\lfloor (n+3)/2 \rfloor - 1}{n} \leq 1 + \frac{2}{n}$$

et, grâce à l'inégalité de concavité $\ln(1+x) \leq x$ (valable pour tout $x > -1$),

$$\boxed{0 \leq \ln\Big(\frac{2\lfloor (n+3)/2 \rfloor - 1}{n}\Big) \leq \frac{2}{n}} \,.$$

d) La série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente puisque son terme général est majoré par le terme général d'une série convergnte, d'après a.

$$h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n}) = \Big(\sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} u_k\Big) + \Big[\frac{\ln(2t-1)}{2}\Big]_1^{\lfloor (n+3)/2 \rfloor} - \frac{1}{2}\ln(n)$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} u_k\Big) + \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{2\lfloor (n+3)/2 \rfloor - 1}{n}\Big)$$

qui tend vers $\boxed{\delta = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k}$ quand n tend vers l'infini, puisque $\lim_{n\to+\infty} \ln\Big(\frac{2\lfloor (n+3)/2\rfloor - 1}{n}\Big) = 0$, d'après c.

e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par décroissance de la fonction $t \longmapsto \frac{2}{(2t-1)^2}$ sur $[1, +\infty[$, on a :

$$\forall\, k \geq 2,\ \frac{2}{(2k-1)^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{2}{(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{2}{(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{n}^{+\infty} \frac{2}{(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n-1}\ .$$

f) $\delta - \big(h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})\big) = \Big(\sum_{k=\lfloor (n+1)/2\rfloor+1}^{+\infty} u_k\Big) - \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{2\lfloor (n+3)/2\rfloor - 1}{n}\Big)$.

Comme $\sum_{k=\lfloor (n+1)/2\rfloor+1}^{+\infty} u_k \geq 0$ et $\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{2\lfloor (n+3)/2\rfloor - 1}{n}\Big) \leq \frac{1}{n}$, on a :

$$\boxed{-\frac{1}{n} \leq \delta - \big(h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})\big)}\ .$$

Comme $\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{2\lfloor (n+3)/2\rfloor - 1}{n}\Big) \geq 0$

et $\sum_{k=\lfloor (n+1)/2\rfloor+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{1}{2\lfloor (n+1)/2\rfloor - 1} \leq \frac{1}{2\big((n+1)/2 - 1\big) - 1} = \frac{1}{n-2}$, on a :

$$\boxed{\delta - \big(h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})\big) \leq \frac{1}{n-2}}\ .$$

g) i) Lorsque eps=0.2, le test d'entrée dans la boucle correspond à l'inégalité $n-2<5$. Comme les valeurs affectées à n progressent de deux en deux, les seules valeurs de $h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})$ effectivement calculées seront $\boxed{h_3(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{3})}$ (valeur initiale affectée à s) et $\boxed{h_5(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{5})}$, puisque le test d'entrée dans la boucle rejette la valeur $n=7$.

ii)

```
(6) s=s+1/n+(log(n-2)-log(n))/2;
```

iii) D'après l'encadrement établi en question f, la valeur absolue de l'écart entre $h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})$ et δ ne peut pas excéder $1/(n-2)$. Avec le test d'entrée dans la boucle « 1/(n-2)>eps » on est assuré que la dernière valeur affectée à « s » correspond à un entier n pour lequel l'écart avec δ n'excèdera pas « eps ». [1]

1. On trouve, par exemple, delta(0.000001) $\simeq$ 0.6351819 .
La valeur exacte de δ est $\frac{\gamma + \ln(2)}{2}$, où γ est la constante d'Euler.

Partie III : séries de Riemann alternées

7. a) i) On procède par récurrence.

- Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 2$ puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{x_k}{k^\beta} = x_1 + \frac{x_2}{2^\beta}$ et
$$\frac{s_2}{2^\beta} + s_1\left(1 - \frac{1}{2^\beta}\right) = \frac{x_1 + x_2}{2^\beta} + x_1\left(1 - \frac{1}{2^\beta}\right) = x_1 + \frac{x_2}{2^\beta}\ .$$
- Hérédité : on suppose la propriété vraie à l'ordre n (≥ 2). On a alors
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_k}{k^\beta} = \frac{x_{n+1}}{(n+1)^\beta} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^\beta} = \frac{x_{n+1}}{(n+1)^\beta} + \frac{s_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k\left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right)$$
$$= \frac{s_{n+1} - s_n}{(n+1)^\beta} + \frac{s_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k\left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right) = \frac{s_{n+1}}{(n+1)^\beta} + \sum_{k=1}^{n} s_k\left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right)$$

ce qui démontre que la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

On a ainsi prouvé, pour tout entier $n \geq 2$, l'égalité :
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^\beta} = \frac{s_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k\left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right)}\ .$$

ii) Quand n tend vers l'infini, $\dfrac{s_n}{n^\beta}$ tend vers 0 puisque sa valeur absolue est majorée par $Mn^{\alpha-\beta}$, qui tend vers 0.

Quant à la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} s_n\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right)$, elle est absolument convergente, donc convergente, puisque la valeur absolue de son terme général est majorée par $M\left(\dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}} - \dfrac{1}{(n+1)^{\beta-\alpha}}\right)$, qui est le terme général d'une série (télescopique) convergente.

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^\beta} = \sum_{k=1}^{+\infty} s_k\left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right)$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{n^\beta}$ est donc convergente.

b) Soit $x > 0$.

La suite $\big((-1)^n\big)_{n\geq 1}$ vérifie l'hypothèse satisfaite par la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ pour $\alpha = 0$ et $M = 1$.

En appliquant le résultat précédent à $\alpha = 0$ et $\beta = x$, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est convergente.

8. Soit s et t deux réels strictement positifs et n un entier non nul.

a) Par indépendance des variables aléatoires $\mathrm{e}^{t X_k}$, on a :
$$E(\mathrm{e}^{t S_n}) = E\big(\mathrm{e}^{t\sum_{k=1}^{n} X_k}\big) = E\Big(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{t X_k}\Big) = \prod_{k=1}^{n} E(\mathrm{e}^{t X_k}) = \boxed{\Big(\frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t})\Big)^n}\ .$$

b) Comme $(2n)! \geq n!\,2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\,t}+\mathrm{e}^{-t}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{n!\,2^n}$$

et finalement :

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\,t}+\mathrm{e}^{-t}\right)\leq \mathrm{e}^{\,t^2/2}}\,.$$

c) Grâce à l'inégalité de Markov et aux résultats de a et b, on a :

$$P\left([S_n>s]\right)=P\left(\left[\mathrm{e}^{\,t\,S_n}>\mathrm{e}^{\,ts}\right]\right)\leq\frac{E\left(\mathrm{e}^{\,t\,S_n}\right)}{\mathrm{e}^{\,ts}}\leq\exp\left(\frac{n\,t^2}{2}-ts\right)$$

d) Comme les variables aléatoires $-X_k$ sont indépendantes et suivent la même loi que les les variables aléatoires X_k, S_n et $-S_n$ ont aussi la même loi.
Par conséquent, on a $P([S_n<-s])=P([-S_n>s])=P([S_n>s])$ et par conséquent :

$$P\left([\,|S_n|>s]\right)=P([S_n<-s])+P([S_n>s])=2\,P\left([\,S_n>s]\,\right)\ .$$

En utilisant le résultat de c pour $t=\dfrac{s}{n}\cdot$, on obtient l'inégalité demandée :

$$\boxed{P\left([\,|S_n|>s]\right)\leq 2\exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right)}\qquad(5)$$

9. Pour tout réel $\alpha\geq 0$, on pose :

$$\mathcal{C}_\alpha=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\Big(\bigcup_{k\geq n}[\,|S_k|>k^\alpha]\Big)\qquad(6)$$

a) Comme S_k est une variable aléatoire, $[\,|S_k|>k^\alpha]$ est un élément de $\mathcal{A}$, quel que soit $k\in\mathbb{N}^*$.
On en déduit, par stabilité de la tribu $\mathcal{A}$ par réunion dénombrable et par intersection dénombrable, que $\mathcal{C}_\alpha$ est aussi un élément de $\mathcal{A}$.

b) On suppose : $\alpha>\dfrac{1}{2}\cdot$

D'après l'inégalité (5), appliquée à $s=n^\alpha$ on a :

$$P([\,|S_n|>n^\alpha])\leq 2\exp\big(-\frac{n^{2\alpha-1}}{2}\big)$$

qui est négligeable par rapport à $\dfrac{1}{n^2}$ quand n tend vers l'infini puisque

$$n^2\exp\big(-\frac{n^{2\alpha-1}}{2}\big)=\exp\big(2\ln(n)-\frac{n^{2\alpha-1}}{2}\big)$$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\big(2\ln(n)-\frac{n^{2\alpha-1}}{2}\big)=-\infty$, par croissances comparées.
La série $\displaystyle\sum_{n\geq1}P([\,|S_n|>n^\alpha])$ est donc convergente, par comparaison à la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}\cdot$

c) On suppose encore : $\alpha>\dfrac{1}{2}\cdot$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Pour tout entier $N \geq n$, $P\big(\bigcup_{k=n}^{N} [\,|S_k| > k^\alpha]\big) \leq \sum_{k=n}^{N} P([\,|S_k| > k^\alpha])$ puisque la réunion de deux ou plusieurs événements est majorée par la somme de leurs probabilités.

Par théorème de la limite monotone, on en déduit

$$P\big(\bigcup_{k\geq n} [\,|S_k| > k^\alpha]\big) = \lim_{N\to+\infty} P\big(\bigcup_{k=n}^{N} [\,|S_k| > k^\alpha]\big) \leq \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n}^{N} P([\,|S_k| > k^\alpha]) = \sum_{k=n}^{+\infty} P([\,|S_k| > k^\alpha])$$

puisque la série $\sum_{k\geq n} P([\,|S_k| > k^\alpha])$ est convergente.

Comme la suite d'événements $\big(\bigcup_{k\geq n} [\,|S_k| > k^\alpha]\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :

$$P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \big(\bigcup_{k\geq n} [\,|S_k| > k^\alpha]\big)\Big) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup_{k\geq n} [\,|S_k| > k^\alpha]\Big) \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq n} P([\,|S_k| > k^\alpha])$$

qui est nulle puisque la série $\sum_{n\geq 1} P([\,|S_n| > n^\alpha])$ est convergente.

Par conséquent $P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \big(\bigcup_{k\geq n} [\,|S_k| > k^\alpha]\big)\Big) = \boxed{P(\mathcal{C}_\alpha) = 0}$.

10. a) On suppose ici : $0 \leq \alpha < 1$.

Soit $\omega \in \overline{\mathcal{C}_\alpha} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\bigcap_{k\geq n} [\,|S_k| \leq k^\alpha]\Big)$.

Il existe un entier $n(\omega) > 0$ tel que :

$$\forall\, k \geq n(\omega),\ |S_k(\omega)| \leq k^{\,\alpha} \ .$$

Il en résulte que la suite $\Big(\dfrac{|S_n(\omega)|}{n^\alpha}\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, puisqu'elle l'est à partir de l'indice $n(\omega)$.
Il existe donc un réel $M(\omega) > 0$ tel que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ |S_k(\omega)| \leq M(\omega)\, k^{\,\alpha} \ .$$

D'après le résultat de la question 7, la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{X_n(\omega)}{n^\beta}$ est convergente pour tout $\beta > \alpha$ et en particulier pour $\beta = 1$.

b) Soit α un réel strictement compris entre 1/2 et 1.
Comme $P(C_\alpha) = 0$, l'inclusion de $\overline{C_\alpha}$ dans $\mathcal{C}$ prouve que $\boxed{P(\mathcal{C}) = 1}$.

c) Pour tout $\omega \in \mathcal{C}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall\, n \geq N,\ |K_n(\omega) - K(\omega)| \leq \varepsilon$$

ce qui se traduit par l'inclusion

$$\mathcal{C} \subset \overline{E(\varepsilon)} \ .$$

Comme $P(\mathcal{C}) = 1$, il résulte de cette inclusion que $P\big(\overline{E_{(\varepsilon)}}\,\big) = 1$, c'est-à-dire $\boxed{P\big(E(\varepsilon)\big) = 0}$.
On pose :

$$E_N(\varepsilon) = \bigcup_{n\geq N} [\,|K - K_n| > \varepsilon] \ .$$

Comme la suite d'événements $\big(E_N(\varepsilon)\big)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, le théorème de limite monotone permet de conclure :

$$\lim_{N\to+\infty} P(E_N(\varepsilon)) = P\Big(\bigcap_{N\in\mathbb{N}^*} E_N(\varepsilon)\Big) = P\big(E(\varepsilon)\big) = 0$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, $P([\,|K-K_n| > \varepsilon]) \leq P\big(E_n(\varepsilon)\big)$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

11. *Dans les questions 11 et 12, on considère une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de Bernoulli de paramètre* $1/2$ et on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k} \tag{7}$$

a) Comme $E(B_k) = \dfrac{1}{2}$ et $V(B_k) = \dfrac{1}{4}$ pour tout k, on a

$$E(H_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \longrightarrow +\infty$$

et, par indépendance des B_k,

$$V(H_n) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{24}\,.$$

b) Soit $r > 0$.

Pour n suffisamment grand, on a $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geq r$ et par conséquent :

$$P([H_n \leq r]) \leq P\Big(\Big[\,\Big|H_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big| \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - r\Big]\Big)$$

que l'on peut majorer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, pour obtenir :

$$P([H_n \leq r]) \leq \frac{V(H_n)}{\Big(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - r\Big)^2}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

c) i)

```
(5) y(i,1)=y(i,1)+(grand(1,1,'bin',1,0.5)-(1-(-1)^k)/2)/k;
```

parce que $\dfrac{\big(1-(-1)^k\big)}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$.

ii) Les trois histogrammes, qui comportent dix classes de valeurs de même étendue, peuvent être obtenus par l'instruction « histplot(10,y) » appliquée successivement à des variables « y » affectées des valeurs simulées par « simul(50,p) », « simul(100,p) » et « simul(200,p) » pour une grande valeur de p (pour les histogrammes fournis, la valeur choisie pour p était 10000).

iii) La forme des histogrammes suggère que la distribution de $\big(H_n - h_n(\mathcal{I})\big)_{n\geq 1}$ se stabilise quand n tend vers l'infini, mais ce n'est qu'une conjecture fragile. S'il y a convergence en loi, la loi-limite ne semble de toute manière pas centrée.

12. a) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{B'_k}{k}\right) - h_n(\mathcal{I}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1-(-1)^k\right)}{2k} = \boxed{\frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}}\ \cdot$

b) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente (voir question 7.b).

Il en résulte, par le thèorème de Slutsky, que la suite $\big(H_n - h_n(\mathcal{I})\big)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire $\frac{K}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k} = \lambda K + \mu$, où $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k}\ \cdot$

Remarques

- $\lim_{n\to+\infty} E\big(H_n - h_n(\mathcal{I})\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k} = -\frac{\ln(2)}{2}$, ce qui confirme que la loi-limite de $H_n - h_n(\mathcal{I})$ n'est pas centrée.
- Comme $E(H_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \circ(1)$, on peut confirmer aussi que :

$$\lim_{n\to+\infty} \big(h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})\big) = \frac{\gamma + \ln(2)}{2}\ \cdot$$