

Mathématiques 2 S
Conception ESCP BS/HEC Paris
Session 2022

1 – Rappel du sujet et indication sur le barème

Le problème 2022 était structuré en trois parties de longueur et de difficultés inégales.

La **première partie** visait à obtenir un intervalle de fluctuation assez grossier de la durée nécessaire pour réunir tous les éléments d'une collection de n objets (problème du collectionneur). Les questions étaient très classiques et, à l'exception des toutes dernières questions plus techniques, faciles. Il fallait toutefois les traiter avec soin. Ce fut l'occasion pour les correcteurs de juger du sérieux des candidats. Cette première partie comptait pour près d'un tiers dans le barème.

La **deuxième partie** se donnait pour objectif de trouver un intervalle de fluctuation plus précis. Il fallait donc mettre en œuvre une analyse probabiliste approfondie aboutissant à un résultat de convergence en loi.

Les questions [7] à [12] donnaient à nouveau l'occasion d'appliquer des méthodes vues en cours. À partir de la question [13], les calculs demandaient plus de réflexion et il fallait vraiment maîtriser le cours sur les questions de convergence. Cette partie, assez longue, comptait pour près de la moitié dans le barème.

La **troisième partie** était une variation sur le thème étudié. Un certain nombre de questions, parfois assez faciles, menaient progressivement vers le résultat final au terme d'un cheminement assez long. Trois questions ([2.e], [11.a], [11.b]) portaient sur la pensée algorithmique et représentaient un peu moins de 10 % du barème.

2 – Remarques de correction

La première partie faisait appel à des techniques élémentaires et classiques, elle a été abordée dans plus des trois quarts des copies. S'il n'est pas surprenant que les questions difficiles ([6.b] et [6.c]) ont mis la plupart des candidats en échec, on peut tout de même s'interroger sur les très nombreuses fautes de raisonnement commises en [2.d] (soustraction d'inégalités) ou par une application mécanique de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en [6.a].

La deuxième partie demandait une connaissance plus approfondie du calcul des probabilités. Certaines méthodes usuelles, vues et revues en cours, ne sont pas maîtrisées par de nombreux candidats :

— [4] et [5] : comment prouver qu'une variable aléatoire est d'espérance finie ? Comment calculer espérance et variance d'une somme de variables aléatoires ?

— [7] : comment justifier qu'une variable admet une densité ?

— [8.b] : comment calculer la densité d'une somme de deux variables aléatoires ?

— [10.b] : comment caractériser la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires ?

— [14.b] : comment justifier qu'une fonction est prolongeable par continuité ?

Les calculs avec la fonction exp ont posé des difficultés. Au contraire, la partie entière est plutôt bien maîtrisée.

On souhaiterait que la plupart des candidats sachent répondre correctement à la question [11.c] : il apparaît que ceux qui ont compris l'intérêt d'un histogramme et de la convergence en loi sont assez peu nombreux, hélas.

Les questions d'algorithmique ont été très peu réussies, alors même qu'elles restaient à un niveau élémentaire. La question [2.e] a été abordée dans moins de la moitié des copies, avec des résultats trop souvent aberrants. La question [11.a] n'a pas été vraiment mieux traitée. Seule la question [11.b] a connu une proportion raisonnable de réponses correctes.

3 – Conseils aux futurs candidats

Sur la forme

Le sujet précise en préambule que la présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'équanimité légendaire des correcteurs est particulièrement mise à mal par des copies de trente pages ou plus et particulièrement mal écrites.

Les questions qualitatives ([1.b], [11.c], [15.a], [17.a], [17.d]) appellent des réponses rédigées en bon français, claires, nettes et précises.

Il est bon de **numéroter soigneusement** les questions traitées.

En manière d'hommage, certains théorèmes portent le nom d'un mathématicien. Écrire le nom de ce mathématicien avec une **majuscule** n'est donc pas facultatif.

Sur la méthode

Manifestement, une majorité de candidats cherchent avant tout à produire une réponse, mais pas à élaborer un raisonnement.

Rappelons donc certains principes.

— Appliquer un théorème, c'est d'abord vérifier que les conditions d'application de ce théorème sont satisfaites.

— Les candidats doivent accorder un soin particulier aux questions dont la réponse est donnée par l'énoncé.

— Le jury préfère les candidats qui prennent le temps de produire un travail bien fait aux candidats dont l'objectif évident est d'aborder toutes les questions à tout prix.

Sur le langage Python

La session 2023 verra l'apparition du langage Python pour les questions d'algorithmique.

La **correction** et la **clarté** du code resteront les principaux critères d'appréciation.

L'efficacité en termes de durée de calculs et la recherche de la brièveté du code ont une fâcheuse tendance à obscurcir le code. En ce qui concerne l'**efficacité** des calculs, on se bornera à éviter les calculs redondants et pour le reste, on s'efforcera d'organiser clairement les calculs. Pour le reste, si des commentaires peuvent être utiles, on peut être sûr qu'un programme qui peut se passer de commentaires est un bon programme.

Question [2.e]

Un code Python possible est le suivant.

```
S = 0
for k in range(1, 10**7+1):
    S = S + 1/k**2
```

On notera que $1e7$ est un *flottant*, inutilisable pour l'indice d'une boucle `for` et que 10^7 est égal à 13 (puisque \wedge désigne l'opération "ou exclusif" sur les expressions binaires de ses deux opérandes).

Question [11.a]

Actuellement, il est recommandé d'utiliser le générateur pseudo-aléatoire du langage Python de la manière suivante.

```
from numpy.random import default_rng
Générateur = default_rng()
geom = Générateur.geometric
```

L'instruction `geom(p)` produira alors un entier, réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p , cependant que l'instruction `geom(p, n)` produira alors un tableau d'entiers contenant une réalisation d'une famille de n variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p . (Il est hors de question d'exiger des candidats qu'ils connaissent ces instructions.)

On pourrait alors répondre à la question posée avec le code suivant en admettant que la fonction `log` ait été importée au préalable, par exemple avec l'instruction `from numpy import log`. (Ici encore, le sujet se chargera de la tâche.)

```
def simulV(n):
    C = 0
    for i in range(1, n+1):
        p = (n-i+1)/n
        C = C + geom(p)
    return C/n - log(n)
```

Question [11.b]

Un code Python possible est le suivant.

```
def echantillonV(n, nb_simulations):  
    V = []  
    for i in range(nb_simulations):  
        V.append(simulV(n))  
    return V
```

Il est aussi possible, mais pas recommandé, de définir la liste en extension.

```
def echantillonV(n, nb_simulations):  
    return [ simulV(n) for i in range(nb_simulations) ]
```

On précise que le code suivant est faux.

```
def echantillonV(n, nb_simulations):  
    return [simulV(n)]*nb_simulations
```

Question [11.c]

Le code Scilab qui fournit les trois histogrammes de l'énoncé pourrait être remplacé par le code Python suivant.

```
import matplotlib.pyplot as plt  
from numpy import exp, linspace  
  
def f(x):  
    return exp(-x)*exp(-exp(-x))  
  
absc = linspace(-2, 10, 100)  
  
for n in [ 5, 10, 50 ]:  
    V = echantillonV(n, 1000)  
    plt.figure()  
    plt.hist(V, bins=20, density=True)  
    plt.plot(absc, f(absc))
```

5 - Résultats statistiques

La note moyenne des 3239 candidats ayant composé s'élève à 10,40/20, avec un écart type de 5,35.

La note médiane est de 11/20, les deux autres quartiles sont égaux à 6/20 et 15/20.

Comme d'habitude, les notes s'étalent sur la totalité de l'intervalle de 0 à 20. On peut féliciter les 476 candidats (14,4% des présents) ayant obtenu une note supérieure à 16/20, avec une mention particulière pour les 32 d'entre eux qui ont obtenu la note maximale de 20/20.