Mathématiques – option technologique

Conception ESCP Business School

Session 2022

Présentation de l'épreuve.
L'épreuve, assez longue comme d'habitude, comportait quatre exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse et probabilités (discrètes ou à densité). Encore une fois, les correcteurs ont trouvé le sujet adapté mais aussi très sélectif, notamment au travers de certaines questions très difficiles, tout en respectant scrupuleusement le programme.

- L'exercice 1, portant sur le programme d'algèbre linéaire, proposait de démontrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ était diagonalisable puis de faire, de deux façons différentes, le calcul de A^n.

- L'exercice 2, portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif d'étudier une variable aléatoire X de densité la fonction f définie par : $f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{a^2} & \text{si } 0\le t\le a\\ \dfrac{2a-t}{a^2} & \text{si } a<t\le 2a\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Plus précisément, on déterminait son espérance et sa variance puis on estimait par intervalle de confiance le paramètre a supposé inconnu, mais supposé élément de $]0,1]$.

- L'exercice 3, portant sur le programme de probabilités décrivait une succession de n tirages successifs d'une boule, avec remise après chaque tirage, dans une urne contenant 20% de boules rouges numérotées 1, les autres étant numérotées 2 et, parmi ces dernières, 10% sont rouges et les autres vertes.

On se proposait d'étudier les variables aléatoires R_n, V_n, U_n et D_n égales respectivement, au nombre de boules rouges obtenues, au nombre de boules vertes obtenues, au nombre de boules portant le numéro 1 obtenues, et enfin au nombre de boules portant le numéro 2 obtenues, ainsi que leur corrélation deux à deux : R_n et V_n d'une part, U_n et D_n d'autre part).

La dernière question demandait l'espérance du gain d'un joueur ayant participé à ces n tirages pour lesquels le joueur gagne un euro si la boule tirée est rouge et porte le numéro 1, gagne deux euros si la boule tirée est rouge et porte le numéro 2 et perd un euro si la boule tirée est verte.

• L'exercice 4, portant sur le programme d'analyse, proposait l'étude de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}\, b_n}$$

Plus précisément, on montrait que ces deux suites sont convergentes et ont même limite.
Un script informatique à trous proposait le calcul de a_n et b_n et deux autres scripts permettaient de trouver le plus petit entier naturel n pour lequel $b_n - a_n \leq 10^{-3}$.

Barème

- Les quatre exercices comptaient respectivement pour environ 21%, 26%, 20% et 33% des points de barème.
- Le poids des questions de Scilab représentait 6,4% des points de barème.

Statistiques.

- Sur les 911 candidats ayant composé (907 candidats en 2021), la note moyenne est de 9,06 sur 20 (quasiment semblable à celle de 2021) avec un écart-type de 4,8 indiquant que les candidats ont été classés de manière très satisfaisante.
- Le nombre de candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à 16 est de 107, soit 11,4 % des candidats présents.
- Le nombre de candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à 12 est de 266, soit 28,4 % des candidats présents.
- On compte 20 candidats qui se voient attribuer la note maximale de 20.
- La note médiane est de 8,3 et les premier et troisième quartiles sont égaux à 5,7 et 12,6 respectivement.

Analyse des copies.

Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène : les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes de bonne qualité (quelques uns semblent vraiment maîtriser le matériel mathématique qui est à leur disposition) et les moins bons semblent dépassés par ce qui est demandé alors que le sujet était émaillé de questions classiques et, pour certaines, pas vraiment difficiles, comme les calculs de produits de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Les copies sont, à de pénibles exceptions près, agréablement présentées et bien rédigées. Rappelons qu'un correcteur ne passe pas de longues minutes à tenter de déchiffrer un passage illisible, ou presque, sur une copie, il est donc essentiel d'adopter une présentation claire, simple et honnête.

En ce qui concerne la crédibilité des copies, signalons les quelques points suivants pour lesquels elle est mise à mal :

Exercice 1

• L'hérédité mal comprise : ayant comme hypothèse de récurrence $A^{2p-1} = \alpha^{p-1}A$, il n'est pas question de vouloir démontrer que $A^{2p} = \alpha^p A$, mais plutôt : $A^{2p+1} = \alpha^p A$.

Exercice 2

• La continuité a fait fuir de nombreux candidats semblant ne pas trop savoir ce qu'est une fonction continue.

• L'intégrale $\frac{1}{a^2}\int_a^{2a}(2a-x)\mathrm{d}x$ a fait d'énormes dégâts, comme par exemple l'égalité très fausse $\frac{1}{a^2}\int_a^{2a}(2a-x)\mathrm{d}x=\frac{2a}{a^2}\int_a^{2a}-x\mathrm{d}x$!

• Les problèmes de calcul sont apparus de façon flagrante dans cet exercice avec des confusions entre $(2a)^2$ et $2a^2$, ou entre $(2a)^3$ et $2a^3$.

• La linéarité de l'espérance a été très peu souvent citée pour justifier l'égalité $E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)$ de même que l'indépendance pour justifier $V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}V(X_k)$.

Exercice 3

• La question « Déterminer la loi de G » ne signifie pas que ladite loi soit une loi usuelle : ce n'était pas le cas. Il faut réfléchir et c'est cette réflexion qui amène ou pas à une loi usuelle.

• La quantité $E(R_n,V_n)$ n'existe pas ! Le calcul de la covariance de R_n et V_n se calcule avec la formule suivante : $\text{Cov}(R_n,V_n)=E(R_nV_n)-E(R_n)E(V_n)$ •

Exercice 4

• À la première question, la bonne définition des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas été démontrée.

• Le test « while » de la question 7a) a été très souvent écrit à l'envers, peut-être par inattention, mais le résultat est le même que si c'était par méconnaissance.

Conclusion.

L'épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.

Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d'une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point des trois "compartiments" du programme (analyse, algèbre linéaire et probabilités), sans faire d'impasses, notamment en probabilités. Il ne faut pas négliger les calculs et s'entraîner pour en maîtriser les techniques élémentaires.

Rappelons que l'on peut obtenir une note honorable sans pour autant traiter les questions compliquées de cette épreuve, mais en s'intéressant seulement à celles pour lesquelles, à leur seule lecture, on sait que l'on doit pouvoir les traiter, mais dans ce cas il faut rédiger avec rigueur et précision et ne pas faire de fautes de calcul dues souvent à une concentration défaillante.