BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESSEC – HEC Paris

MATHÉMATIQUES B/L

FILIÈRE LITTÉRAIRE

Programme ENS B/L

Mardi 2 mai 2023, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Si Y est une variable aléatoire qui admet une espérance et une variance, on note respectivement $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$ son espérance et sa variance.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{|x|}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Étudier la parité de f.
   (c) Étudier la dérivabilité de f en 0.
2. (a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$ en précisant les limites aux bornes de $[0, +\infty[$ et la valeur des extrema.
   (b) Esquisser la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Tournez la page S.V.P.

(c) Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(d) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire admettant f comme densité et on admet que X possède une espérance.

3. (a) Donner la valeur de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

(b) On note F_X la fonction de répartition de X. Montrer que :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(c) Résoudre l'équation d'inconnue x suivante : $F_X(x) = \frac{3}{4}$. Que représente la solution trouvée pour la variable aléatoire X ?

4. On pose $T = |X|$ et on admet que T est une variable aléatoire à densité.
On note F_T la fonction de répartition de T.

(a) Déterminer $F_T(x)$ pour tout x réel.

(b) Donner une densité f_T de la variable aléatoire T.

(c) Montrer qur T admet une espérance et montrer que $\mathbb{E}(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(d) Reconnaître la loi de T^2. En déduire sans calcul l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(T^2)$.

(e) Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(X)$ et de $\mathbb{V}(T)$.

EXERCICE 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique noté $\langle .,. \rangle$.
On note $\|.\|$ la norme associée.

Partie 1.

Dans cette première partie seulement, on suppose que $n = 3$.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + z = 0\}$. On pose

$$u = (1, 0, -1) \qquad v = (-1, 1, -1) \qquad w = (1, 2, 1)$$

On note

$$e_1 = (1, 0, 0) \qquad e_2 = (0, 1, 0) \qquad e_3 = (0, 0, 1)$$

On rappelle que (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

2. (a) Montrer que (u, v) est une base orthogonale de F.

(b) Montrer que (w) est une base de $F^{\perp}$.

(c) Trouver des réels α, β et γ tels que $\mathcal{B} = (\alpha u, \beta v, \gamma w)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

(d) Déterminer les coordonnées de e_1 dans la base $\mathcal{B}$.

3. Soit p_F la projection orthogonale sur F.
   (a) Soit A la matrice représentative de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Vérifier que
$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$
   (b) Ecrire la matrice Δ représentative de p_F dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) Donner une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = P\Delta P^{-1}$.
   (d) La matrice A est-elle inversible ?
   (e) Montrer que A est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres de A et donner une base de chaque sous-espace propre.
4. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$.
   Donner un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ (non nul) tel que $\|p_F(x)\| = \|x\|$.
   En déduire l'existence et la valeur de
$$\max\left\{\frac{\|p_F(x)\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\}\right\}.$$

Partie 2.

On revient au cas général avec $n \geqslant 2$ quelconque. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme 1.

1. Soit φ l'application qui, à tout $x \in \mathbb{R}^n$, associe $\varphi(x) = \langle x, v\rangle v$.
   (a) Montrer que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
   (b) Montrer que φ est une projection et que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est la droite vectorielle engendrée par v.
   (c) Montrer que φ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   (d) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.
   L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
   (e) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\varphi(x)\| \leqslant \|x\|$.
   (f) Etablir l'existence et déterminer la valeur de
$$\max\left\{\frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\}\right\}.$$
2. Soit s l'application qui, à tout $x \in \mathbb{R}^n$, associe $s(x) = 2\varphi(x) - x$.
   (a) Montrer que s est une symétrie de $\mathbb{R}^n$.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de s.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|s(x)\| = \|x\|$.

Partie 3.

Dans cette dernière partie, H désigne un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension r telle que $1 \leqslant r \leqslant n-1$.

1. On note p_H la projection orthogonale sur H.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p_H(x)\| \leqslant \|x\|$ et préciser les vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels on a l'égalité.

(b) Etablir l'existence et déterminer la valeur de

$$\max\left\{\frac{\|p_H(x)\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\}\right\}.$$

2. Soit p une projection sur H qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

(a) Soit $x \in (\mathrm{Ker}(p))^{\perp}$. Calculer $\langle x, p(x) - x\rangle$.

(b) Montrer que p est une projection orthogonale.

EXERCICE 3.

Partie 1. Calcul de la somme d'une série.

Dans cette partie, on veut déterminer la valeur de $\zeta_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)dt.$$

On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\cos^m(t) = (\cos(t))^m$.

1. Rappeler la nature de la série $\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p^2}$.

2. (a) Calculer W_0 et W_1.

(b) Soit n un entier de $\mathbb{N}$. Justifier que $W_n > 0$.

(c) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin(t)\cos^{2n}(t)dt.$$

(d) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n.$$

3. (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$J_n - J_{n+1} = \frac{1}{2n+1}J_{n+1} + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)dt.$$

(b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)J_{n+1} - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)}W_{n+1}.$$

(c) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = \frac{-2}{(2n+2)^2}.$$

(d) Conclure que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} = -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}.$$

4. (a) Montrer que

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}t \leqslant \sin(t) \leqslant t.$$

(b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$0 < J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(W_n - W_{n+1}\right)$$

puis que

$$0 < J_n \leqslant \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}.$$

5. Déterminer la valeur de $\zeta_2 = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}$.

6. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$.

Utiliser les résultats des questions précédentes pour montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et calculer sa limite.

On notera désormais :

$$S_2 = \lim_{n\to+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}.$$

Partie 2. Calcul d'une intégrale.

1. Montrer que

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}x^{p-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

2. Justifier que

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\ln(1+x) - \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

3. (a) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ converge.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx - \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(c) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

EXERCICE 4.

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Si X est une variable aléatoire possédant une espérance et une variance, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.
Si n est un élément de $\mathbb{N}^*$, la notation $[\![1, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$.

Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2, on définit la covariance de X et Y, notée $\mathrm{Cov}(X, Y)$ par la formule :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

On a alors

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X) \quad \textbf{et} \quad \mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X).$$

Partie 1. Préliminaires.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
2. Sans soulever de problème d'existence, montrer que si X, Y et Z sont trois variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2, alors

$$\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{Cov}(Z, aX + bY) = a\,\mathrm{Cov}(Z, X) + b\,\mathrm{Cov}(Z, Y)$$

et

$$\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y).$$

<u>On admet</u> que, pour tout entier $n \geqslant 2$, tout n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et toute famille $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2, on a :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_i a_j \,\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbb{V}\,(X_i) + \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \neq j}} a_i a_j \,\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)\,.$$

Partie 2. Matrices des covariances.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. On suppose que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre 1.

Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $Y_k = X_1 + \cdots + X_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

On pose $M_n = (\mathrm{Cov}\,(Y_i, Y_j))_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice dont le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal à $\mathrm{Cov}\,(Y_i, Y_j)$.

M_n est appelée matrice des covariances de la famille $(Y_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$.

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de Y_k, puis donner, sans démonstration, son espérance $\mathbb{E}(Y_k)$ et sa variance $\mathbb{V}(Y_k)$.
2. On considère tout d'abord le cas particulier $n = 2$.
   (a) Expliciter la matrice M_2.
   (b) Montrer que M_2 est inversible et expliciter son inverse.
3. On revient au cas général avec $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
   (a) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$. Montrer que $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = i$.
   (b) Expliciter la matrice M_n.

   On note

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = [t_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

   la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients situés au-dessus de la diagonale sont égaux à 1, les autres étant nuls. Ainsi, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$t_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

4. Montrer que T_n est inversible et calculer son inverse que l'on notera R_n.
5. Pour toute matrice A, on note $(A)^T$ la transposée de A.
   (a) Exprimer M_n en fonction de $(T_n)^T$ et de T_n.
   (b) Justifier que M_n est inversible et exprimer $(M_n)^{-1}$ en fonction de R_n et $(R_n)^T$.
6. Soit $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $Z_n = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   Montrer que

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i Y_i\right) = (T_n Z_n)^T (T_n Z_n).$$

   On pose $W_n = T_n Z_n = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

7. (a) Exprimer Z_n en fonction de R_n et de W_n.
   (b) Montrer que

$$(R_n W_n)^T (R_n W_n) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} (w_i - w_{i+1})^2\right) + w_n^2.$$

8. (a) Vérifier que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a - b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$.
   (b) Montrer que

$$(R_n W_n)^T (R_n W_n) \leqslant 4 (W_n)^T W_n.$$

9. Conclure que pour tout $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i Y_i\right) \geqslant \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} z_i^2.$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1101 – D'après documents fournis