Code sujet : 285

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESCP BS

MATHÉMATIQUES T

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

Mardi 23 avril 2024, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

On notera : $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sous réserve d'existence.

Exercice 1

Soient les fonctions f et g définies par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} e^t & si\ t \leqslant 0 \\ 0 & si\ t > 0 \end{cases} \end{array} , \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 0 & si\ t \leqslant 0 \\ \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} & si\ t > 0 \end{cases} \end{array} .$$

1. Petit Préliminaire :
   (a) Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^y g(t)\,dt$ pour $y \geqslant 0$.
2. Montrer que la fonction f peut-être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
   Dans la suite, on note F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont f est une densité de probabilité.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Justifier que $F_X(x) = 1$ si $x \geqslant 0$.

(b) Calculer $F_X(x)$ lorsque $x < 0$.

4. On admet que $-X$ est une variable aléatoire réelle et on note G sa fonction de répartition.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $G(x)$ en fonction de F_X.

   (b) En déduire, à l'aide de la question 3, que $-X$ suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

   (c) En déduire les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = X^2$. On note F_Y sa fonction de répartition.

   (a) Déterminer l'espérance de Y, notée $\mathbb{E}(Y)$, en utilisant la question 4c.

   (b) Déterminer la fonction de répartition de Y.

   (c) Conclure que Y est une variable aléatoire à densité et en donner une densité de probabilité.

Exercice 2

On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer un réel a tel que : $A^2 - 8A = aI$.

   (b) Montrer que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

   (c) Déterminer les valeurs propres possibles de A.

2. (a) Résoudre $AX = 6X$, où X est de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (c) En déduire les valeurs propres de A.

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer PQ. En déduire que la matrice P est inversible ainsi que l'expression de son inverse P^{-1}.

   (b) Calculer AP et PD. En déduire que A est diagonalisable.

   (c) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$.

   (d) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dernière colonne de A^n vaut : $2^{n-2}\begin{pmatrix} 3^n - 1 \\ 3^n - 1 \\ 2(3^n + 1) \end{pmatrix}$.

4. **Application :** Lucile aime lire un livre avant de s'endormir. Elle possède trois types de livres : des livres de chevaux, des livres de dinosaures et des livres de princesses. Le choix du livre se fait en fonction du livre qu'elle a lu la veille selon le schéma suivant, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

   - si elle a lu un livre de chevaux le jour n, elle lira un livre de chevaux le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou un livre de princesses avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de dinosaures avec probabilité $\frac{1}{3}$,
   - si elle a lu un livre de princesses le jour n, elle lira un livre de chevaux le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de princesses avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou un livre de dinosaures avec probabilité $\frac{1}{3}$,
   - si elle a lu un livre de dinosaures le jour n, elle lira un livre de chevaux le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de princesses avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de dinosaures avec probabilité $\frac{2}{3}$.

   Le premier jour, elle lit un livre de dinosaures.

   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   - c_n la probabilité de l'événement C_n : "Lire un livre de chevaux le jour n",
   - p_n la probabilité de l'événement P_n : "Lire un livre de princesses le jour n",
   - d_n la probabilité de l'événement D_n : "Lire un livre de dinosaures le jour n".
   - $X_n = \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

(a) Que vaut X_1 ?

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (C_n, P_n, D_n), montrer que : $X_{n+1} = \frac{1}{6}AX_n$.

(c) En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = \frac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1$.

(d) En utilisant la question 3d, montrer que $d_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$.

Exercice 3

On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles, alors $X+Y$ est une variable aléatoire réelle. Dans cet exercice, on étudie deux versions d'un jeu, dont le but est d'obtenir un maximum de points.
Soit n un entier naturel pair noté $n = 2N$ avec N un entier supérieur ou égal à 2.
On dispose d'une urne contenant n billes, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n.

Partie I) Première version

Dans ce premier jeu, le joueur tire au hasard une bille dans l'urne. On note X la variable aléatoire égale au résultat du numéro obtenu. On remet la bille dans l'urne et on effectue un deuxième tirage. On définit alors une variable aléatoire Y qui vaut 1 si ce numéro est impair et 0 si ce numéro est pair. À la fin du jeu, le nombre de points du joueur vaut $X+Y$.

Par exemple si le joueur tire la bille numéro 4, remet cette bille dans l'urne, puis tire la bille numéro 3, alors $X = 4$, $Y = 1$ et le nombre de points obtenus par le joueur vaut $X + Y = 5$.

1. (a) Combien y a-t-il de numéros pairs dans l'urne lorsque $n = 2N$?

   (b) Reconnaitre, en justifiant, les lois de X et Y. Donner leurs espérance et variance.

2. **Python**
   Compléter le programme suivant afin qu'il simule le nombre de points obtenus par le joueur à l'issue d'une partie du jeu.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def jeu_1(N):
        n=2*N
        X= rd.randint(1,n+1)
        Y= rd.randint(0,2)
        return ......
```

3. Justifier que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

4. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X+Y$? Justifier votre réponse.

5. (a) Justifier les égalités suivantes : $P(X+Y=1) = \frac{1}{2n}$ et $P(X+Y=n+1) = \frac{1}{2n}$.

   (b) Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Déterminer $P(X+Y=k)$ en utilisant la formule des probabilités totales.

   (c) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{n+1} P(X+Y=k) = 1$.

6. (a) Que vaut $\mathbb{E}(X+Y)$? Interpréter le résultat obtenu.

   (b) **Python**
   On définit le programme suivant :

```
def simulation(N):
        s=0
        for k in range(1000):
                s=s+ jeu_1(N)
        return s/1000
```

On exécute `simulation(4)` et Python renvoie 4,939. Expliquer ce résultat.

Partie II) Seconde version

Dans ce second jeu, on ne remet pas la bille tirée au premier tirage dans l'urne. Le jeu devient donc :
Le joueur tire au hasard une bille dans l'urne. On note X la variable aléatoire égale au résultat du numéro obtenu. On ne remet pas la bille dans l'urne et on effectue un deuxième tirage. La variable aléatoire Y vaut 1 si ce numéro est impair et 0 si ce numéro est pair. À la fin du jeu, le nombre de points du joueur vaut toujours $X+Y$.

1. (a) Montrer que : $P_{(X \text{ est paire})}(Y=1) = \dfrac{N}{2N-1}$ et que $P_{(X \text{ est impaire})}(Y=1) = \dfrac{N-1}{2N-1}$.
   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $((X \text{ est paire}), (X \text{ est impaire}))$, calculer $P(Y=1)$.
   (c) En déduire la loi de Y.
2. (a) Donner la valeur de $P((X=1)\cap(Y=1))$ en justifiant votre réponse.
   (b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On rappelle que le but du jeu est d'obtenir le plus de points possibles. Est-ce qu'une version du jeu est favorable en moyenne au joueur ?

Exercice 4

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ \textit{et pour tout } n \in \mathbb{N}^* : (n+1)u_{n+2} - (2n+1)u_{n+1} + nu_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right). \quad (\star)$$

On admet qu'il existe une unique suite, notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, satisfaisant $(\star)$.
Le but de cet exercice est de savoir si il est possible d'obtenir une variable aléatoire X_u à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_u = n) = \frac{\alpha_u}{nu_n}, \text{ où } \alpha_u \text{ est un réel positif indépendant de } n. \qquad (1)$$

1. Dans cette question uniquement, on s'intéresse à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_1 = 1,\ v_2 = 1,\ \textit{et pour tout } n \in \mathbb{N}^* : (n+1)v_{n+2} - (2n+1)v_{n+1} + nv_n = 0. \quad (\star\star)$$

   On admet qu'il existe une unique suite, notée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, satisfaisant $(\star\star)$.
   On souhaite savoir si il est possible d'obtenir une variable aléatoire X_v à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_v = n) = \frac{\alpha_v}{nv_n}, \text{ où } \alpha_v \text{ est un réel positif indépendant de } n. \qquad (2)$$

   (a) Calculer v_3 et v_4.
   (b) Par récurrence montrer la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $v_n = 1$ et $v_{n+1} = 1$ », définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.
      i. Montrer que : $S_{2N} - S_N \geqslant \dfrac{1}{2}$.
      ii. Déterminer la monotonie de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire, à l'aide du théorème de la limite monotone, que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
      iii. En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{nv_n}$. La variable aléatoire X_v définie en (2) existe-t-elle ?
2. Calculer u_3 et u_4. On exprimera chaque résultat sous la forme $a + b\ln(2) + c\ln(3)$ où a, b et c sont des réels.
3. **Python**
   Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que l'instruction `np.ones(N)` modélise les N premiers termes d'une suite sous forme d'un tableau de longueur N dont tous les éléments valent 1.
   Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, la commande `u[k]` modélise le terme u_{k+1}.
   Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la liste des N premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui satisfait $(\star)$.

```python
import numpy as np
def Suite_U(N):
        u = np.ones(N)
        for k in range(1,N-1):
                u[k+1] = ......
        return u
```

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \dfrac{e^{n(u_{n+1}-u_n)}}{n}$.
   (a) Calculer w_1.
   (b) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$.
   (d) Soit N un entier supérieur ou égal à 3.
   À l'aide d'un télescopage, montrer que $u_N = 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n}$.
5. Dans cette question on souhaite déterminer le comportement de u_N quand N est très grand.
   Pour cela, on définit la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\ln(t)}{t} \end{array} \right.$ et N un entier supérieur ou égal à 4.
   (a) Etudier les variations de la fonction f sur $[3,+\infty[$.
   (b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant 3, \quad f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$.
   (c) En sommant la relation précédente pour k entre 3 et $N-1$, montrer que :
   $$\sum_{k=4}^{N} f(k) \leqslant \int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=3}^{N-1} f(k).$$
   (d) En déduire, en utilisant la question 4d, que :
   $$1 + f(2) + \int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_N \leqslant \int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t + 1 + f(2) + f(3).$$
6. Le but de cette question est de calculer $\displaystyle\int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t$, pour N un entier supérieur ou égal à 3.
   (a) Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $t \mapsto (\ln(t))^2$.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t$.
7. Déduire des questions 5d et 6b que : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{u_N}{\ln(N)^2} = \frac{1}{2}$.
8. Dans cette question, on admet que $\displaystyle\sum \frac{1}{nu_n}$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^2}\,dt$ ont la même nature.
   (a) Soit $A \in [2,+\infty[$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_2^A \frac{1}{t} \times \frac{1}{\ln(t)^2}\,dt$.
   (b) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{nu_n}$. Conclure.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 24 1180 – D'après documents fournis