MATHEMATIQUES T

Conception BSB

Session 2024

Exercice 1:

1. $A = D + N$

2.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{N}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{DN = N}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{D}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{ND}$$

$DN \neq ND$ donc les matrices N et D ne commutent pas.

3. $a_2 = a_1 - 1 = -1 - 1 = -2$; $a_3 = a_2 - 1 = -2 - 1 = -3$; $a_4 = a_3 - 1 = -3 - 1$; $\boxed{a_4 = -4}$

4. $c_{n+1} - c_n = 2^n \iff c_{n+1} = 2^n + c_n$

donc $c_2 = 2^1 + c_1 = 2 + 1 = 3$ et $c_3 = 2^2 + c_2 = 4 + 3$; $\boxed{c_3 = 7.}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5. $b_2 = b_1 - c_1$ $\quad$ $b_3 = b_2 - c_2$

$= 0 - 1$ $\quad$ $= -1 - 3$

$= \boxed{-1}$ $\quad$ $= \boxed{-4}$

6. $a_n = a_1 (n-1) + r$

$= -1(n-1) - 1$

$= -n + 1 - 1 = -n$

7.

8.

9.

10. On pose $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, "$b_n = (n+1) - 2^n$".

Initialisation :

pour $n = 1$.

$(1+1) - 2^1 = 2 - 2 = 0 = b_1$.

Donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier n pour lequel la propriété est vraie. Vérifions qu'elle est encore vraie au rang $n+1$.

par hypothèse de récurrence : $b_n = (n+1) - 2^n$.

$b_{n+1} = b_n - c_n$

$= (n+1) - 2^n - (2^n - 1)$

⊛

③ $b_{n+1} = n+1 - 2^n - 2^n + 1$
$= n+1 - 2\times 2^n + 1$
$= n+2 - 2^{n+1}$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion:

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (n+1) - 2^n$.

11. $u_1 = -1$, $v_1 = 0$ et $w_1 = 1$.

12.
$$\left.\begin{pmatrix} 1 & u_n & v_n \\ 0 & 1 & w_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\right\} A^n$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_n - 1 & v_n - w_n \\ 0 & 1 & w_n + 2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}}_{A\times A^n = A^{n+1}}$$

Donc $u_{n+1} = u_n - 1$ $\quad v_{n+1} = v_n - w_n$ $\quad w_{n+1} = w_n + 2^n$
$\Leftrightarrow a_{n+1} = a_n - 1$ $\quad \Leftrightarrow b_{n+1} = b_n - c_n$ $\quad \Leftrightarrow c_{n+1} = c_n + 2^n$

Donc $u_n = a_n$, $v_n = b_n$ et $w_n = c_n$

13. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & (n+1) - 2^n \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

14.

15.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{W} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{AW=2W}$$

Donc A a 2 comme valeur propre associé au vecteur propre W.

16.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{AX=X}$$

Donc A a une valeur propre de 1 associé au vecteur propre X.

17.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^2 = I}$$

18. $P \times P = I$

donc P est inversible et son inverse est lui-même.

$P^{-1} = P$.

19. $S = PAP$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{PA}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{PA} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{PAP = S}$$

$$D+N=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}_{D}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{N}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}_{D+N=S}.$$

20. $$D^k=\begin{pmatrix}1^k&0&0\\0&1^k&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}$$

21. $$\overbrace{\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}^{N}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{N}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{N^2=0}$$

Donc pour tout entier $k \geq 2$, $N^k=0$.

22. $$\overbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}^{D}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{N}\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{ND=N}.$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}^{N}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{DN=ND=N}$$

5/20

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

23. $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!}$

$= \frac{n!}{(n-1)!} = \boxed{n}$

24. Formule du binôme de Newton : $\sum_{k=0}^{n} (a+b)^k = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Donc $S^n = \cancel{(D+N)^n} \sum_{k=0}^{n} (D+N)^n$ mais $\forall k \geq 2$, $N^n = 0$

Donc $S^n = \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1}$

$= 1 \times I \times D^n + n \times N \times D^{n-1}$

$= D^n + nN \times D^{n-1}$

$\vdots$

$= D^n + nN$

25

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}_{D^n} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{nN} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}_{S^n}.$$

26. On pose $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \ A^n = PS^nP^{-1}$.

<u>Initialisation :</u>

pour $n = 0$.

$PS^0P = PIP = PP = I$

$A^0 = I$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

<u>Hérédité :</u>

Supposons qu'il existe un entier n pour lequel la propriété est vraie. Vérifions qu'elle l'est encore au rang $n+1$.

Par hypothèse de récurrence : $A^n = PS^nP$

Et $S = PAP$

$\Leftrightarrow P^{-1}SP^{-1} = A$

$\Leftrightarrow PSP = A$

Donc $A^{n+1} = A \times A^n$

$= PSP \times PS^nP$

$= PSPPS^nP$

$= PSIS^nP$

$= PSS^nP$

$= PS^{n+1}P$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

<u>Conclusion :</u>

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PS^nP$

2),
$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}^{S^n} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{P}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -n & 2^n \\ 0 & 1 & -2^n \\ 0 & 0 & -2^n \end{pmatrix}}_{PS^n} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -n & 1+n-2^n \\ 0 & 1 & -1+2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}_{PS^nP = A^n}$$

Exercice 2 :

1. pour $x = 0$:

$$f(0) = \frac{1}{(1+0)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$g(0) = \frac{2}{(1+0)^2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$h(0) = \frac{3}{(1+0)^2} = \frac{3}{1} = 3$$

Donc la courbe de la fonction $f(x)$ correspond au graphique B, la fonction $g(x)$ correspond au graphique C et la fonction $h(x)$ correspond au graphique A.

2. Pour qu'une fonction soit une densité de probabilité, il faut qu'elle soit positive, continue et qu'elle converge.

3. $I = \int_0^1 g(x)\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{2}{(1+x)^2}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

$$= 2\left[-\frac{2 \times 1}{(2-1)(1+x)^3}\right]_0^1$$

$$= 2\left[-\frac{2}{(1+x)^3}\right]_0^1$$

$$= 2\left(-\frac{2}{(1+1)^3} + \frac{2}{(1+0)^3}\right) = 2\left(-\frac{1}{4} + 2\right) = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{8}$$

4. g est une densité de probabilité car elle est positive, continue et converge.

5. a)

b) $P(X \leq \frac{1}{2}) = G(\frac{1}{2})$

$= 2 - \frac{2}{1+\frac{1}{2}}$

$= 2 - \frac{2}{\frac{3}{2}}$

$= 2 - 2 \times \frac{2}{3}$

$= 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

c)

Exercice 3 :

Première partie :

1. L'urne contient deux boules rouges et une boule verte.

$X = 2$, $Y = 1$ et le vainqueur est Alice.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2. A est réalisé si $X > Y$.

3. On considère l'expérience : on lance une pièce. On considère l'évènement ~~A Alice gagne. Pour cela, il~~ Alice place une boule rouge dans l'urne. X est la variable aléatoire correspondant au nombre de boules placées par Alice. On répète l'expérience 3 fois. Donc X suit une loi binomiale de paramètre $(3, \frac{1}{2})$.

$E(X) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Y suit la même loi mais de paramètres $(2, \frac{1}{2})$

$E(Y) = 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

4.

k	0	1	2	3
$P(X = k$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

5. 7 if $A >= 2$:

6. $E(X) > E(Y)$

Alice a donc plus de chance de gagner que Bob, en effet, ce dernier mettra en moyenne une boule dans l'urne tandis que Alice en mettra $\frac{3}{2} (> 1)$.

7. $P_{(Y=0)}(A) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

10/20

8. $P(A) = P(Y=0)\times P_{(Y=0)}(A) + P(Y=1)\times P_{(Y=1)}(A) + P(Y=2)\times P_{(Y=2)}(A)$

$= P(Y=0)\times(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)) + P(Y=1)\times(P(X=2)+P(X=3)) + P(Y=2)\times P(X=3)$

$= \frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)+\frac{2}{4}\times\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}$

$= \frac{1}{4}\times\frac{7}{8}+\frac{2}{4}\times\frac{4}{8}+\frac{1}{32}$

$= \frac{7}{32}+\frac{8}{32}+\frac{1}{32}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$

9. Oui car si $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(\overline{A})=\frac{1}{2}$ sachant que $P(\overline{A})$ est la probabilité que Alice perde donc que Bob gagne. Ils ont donc la même probabilité de gagner.

10. $P_{(A)}(Y=0) = \frac{P(Y=0)\cap P(A)}{P(A)}$

$= \frac{P(Y=0)\times P_{(Y=0)}(A)}{P(A)}$

$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{7}{32}\times 2 = \frac{14}{32}=\frac{7}{16}$.

<u>Seconde partie:</u>

11. L'évènement A_1 est "Alice remporte la manche 1".

Pour que A_1 soit réalisé, Alice doit tomber sur pile et Bob sur face.

Donc $P(A_1) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

12. $P_{(\overline{A_n})}(A_{n+1})$ est la probabilité qu'Alice remporte la manche $n+1$ sachant qu'elle a perdu la manche n. Si elle a perdu la manche n alors Bob a gagné donc il ne possède qu'une seule boule verte à la manche

11/20

$n+1$.

Donc $P_{(\overline{A_n})}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

13. a) La probabilité que Bob place une boule verte dans l'urne est de ~~f~~ $\frac{1}{3}$.

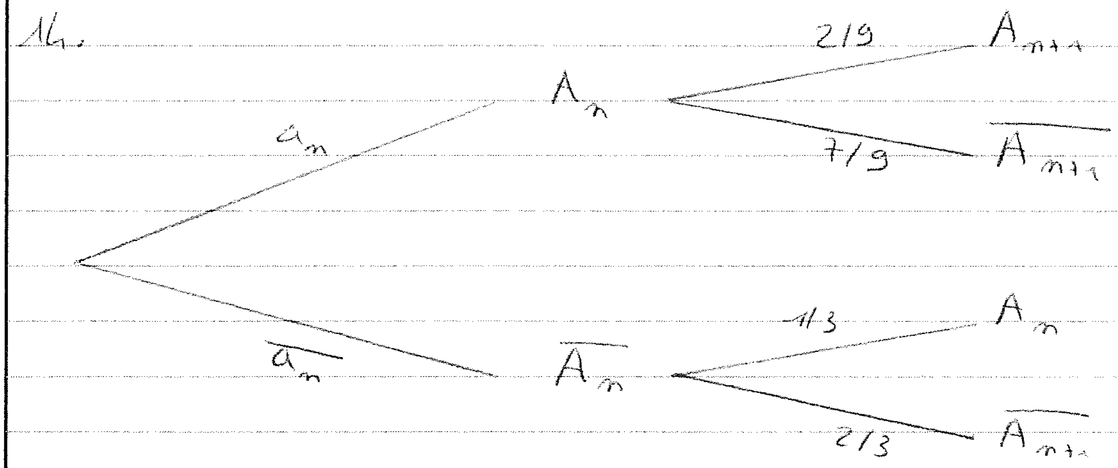
Donc $P_{(A_n)}(\overline{A_{n+1}}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

b) $P_{(A_n)}(A_{n+1}) = P(A_{n+1}) \times P(\overline{A_{n+1}}) \times P(\overline{A_{n+1}})$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

c) $P_{(A_n)}(\overline{A_{n+1}}) = 1 - P_{(A_n)}(A_{n+1}) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

14.



Donc $a_{n+1} = \frac{2}{9} a_n + \frac{1}{3} \overline{a_n}$

$= \frac{2}{9} a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n)$

$= \frac{2}{9} a_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} a_n$

$= -\frac{1}{9} a_n + \frac{1}{3}$

15. 3. for k in range (2; n+1):
4. a = -1/9 * a + 1/3

16. $x = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$

$\iff x + \frac{1}{9}x = \frac{1}{3}$

$\iff \frac{10}{9}x = \frac{1}{3}$

$\iff x = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{10}{9}}$ $\iff x = \frac{1}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

17. $u_n = a_n - \frac{3}{10}$

$u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{3}{10}$

$= -\frac{1}{9}a_n + \frac{1}{3} - \frac{3}{10}$

$= -\frac{1}{9}a_n + \frac{1}{30}$

$= -\frac{1}{9}\left(a_n - \frac{3}{10}\right)$

$= -\frac{1}{9} \times u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{9}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

18. $u_1 = a_1 - \frac{3}{10} = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$

$= \frac{1}{30} \times \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}$.

19. $a_n = u_n + \frac{3}{10}$

$= \frac{1}{30} \times \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{3}{10}$

20. $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{30} \times \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{3}{10} = 0,3$.

Exercice 4:

1. $g'(x) = \frac{1 \times e^x - (x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x - (x+1)e^x}{(e^x)^2}$

$= \frac{e^x(1-(x+1))}{(e^x)^2}$.

$= \frac{1-x-1}{e^x} = -\frac{x}{e^x}$.

2.

3. $I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx$

$= \int_0^1 xe^{-x}$

$= \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^1$

$= -(1+1)e^{-1} + (0+1)e^{-0}$

$= -2e^{-1} + 1$

$= 1 - 2e^{-1}.$

4. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0\end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$ par croissances comparées

5. $f'_2(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x})$

$= 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$

$= (2-x)xe^{-x}.$

6. $f'_2(x) = (2-x)xe^{-x}$

$2 - x = 0 \iff x = 2 \qquad x = 0$

Donc $f'_2(x)$ s'annule si $x = 0$ ou $x = 2$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$(2-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4\times e^{-2}$	$\searrow$	0

$f_2(0)=0$ $\quad$ $f_2(2)=2^2e^{-2}=4e^{-2}$

7. D'après le tableau de variations ci-dessus ;

$0\le x\le 2$

$\Leftrightarrow f_2(0)\le f_2(x)\le f_2(2)$

$\Leftrightarrow 0\le f_2(x)\le 4e^{-2}$.

8. $0\le f_2(x)\le 4e^{-2}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 0\,dx \le \int_0^1 f_2(x)\,dx \le \int_0^1 4e^{-2}\,dx$

$\Leftrightarrow 0\le I_2\le 4e^{-2}$.

9. $I_2=\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$

on pose $u'(x)=e^{-x}$ et $v(x)=x^2$
et $u(x)=-e^{-x}$ et $v'(x)=2x$

Par IPP :

$I_2 = [-e^{-x} \times x^2]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} \times 2x \, dx$

$= -e^{-1} \times 1^2 - e^{-0} \times 0^2 - \int_0^1 -2xe^{-x} dx$

$= -e^{-1} - 2\int_0^1 xe^{-x} dx$

$= -e^{-1} - 2I_1$.

10. $I_2 = -e^{-1} - 2I_1$

$= -e^{-1} - 2(1 - 2e^{-1})$

$= -e^{-1} - 2 + 4e^{-1}$

$= -2 + 3e^{-1}$

11. $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx$

$= [-e^{-x}]_0^1$

$= -e^{-1} - e^{-0}$

$= -e^{-1} - 1$

$= -(1 + e^{-1})$

12. $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^n e^{-1} dx$

~~on pose~~ $I_{n+1} = \int_0^1 f_{n+1}(x) dx$

$= \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx$

On pose $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x^{n+1}$

et $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = (n+1)x^{n}$

Par IPP :

$I_{n+1} = \left[-e^{-x} \times x^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} \times (n+1)x^n \, dx$

$= -e^{-1} \times 1^{n+1} - e^{-0} \times 0^{n+1} + \int_0^1 (n+1) x^n e^{-x} dx$

$= -e^{-1} + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

$= -e^{-1} + (n+1) I_n$.

13.

14. $f_n(x) = x^n e^{-x}$

$f_n'(x) = n x^{n-1} e^{-x} + x^n (-e^{-x})$

$= x^{n-1} e^{-x} (n - x)$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ 1
x^{n-1}	$+$
e^{-x}	$+$
$n - x$	$+$
$f_n'(x)$	$+$
$f_n(x)$	$\nearrow$

15. $0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow f_n(0) \leq f_n(x) \leq f_n(1)$

$\Leftrightarrow 0 \leq f_n(x) \leq e^{-1}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 e^{-1}\,dx$

$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq e^{-1}$

16.